

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 512.552+512.545

ПЕРВИЧНЫЙ РАДИКАЛ $\mathcal{K}$ -УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБР КАК РАДИКАЛ В СМЫСЛЕ КУРОША

Ю. В. Кочетова (г. Москва)

Аннотация

Рассматривается подход упорядочения алгебр, предложенный В. М. Копытовым. Изучаются свойства факторалгебры решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем по ее l -первичному радикалу. Для доказательства свойств l -первичного радикала введены понятия порядкового, строгого порядкового и решеточного гомоморфизма l -алгебр и исследованы их свойства.

Ключевые слова: решёточно $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над полем, порядковый гомоморфизм, первичный идеал, первичный радикал.

PRIME RADICALS OF $\mathcal{K}$ -ORDERED ALGEBRAS AS KUROSCH RADICALS

J. V. Kochetova

Abstract

The Kopytov's order for any algebras over a field is considered. Some results concerned with the properties of a factoralgebra for a lattice $\mathcal{K}$ -ordered algebras and its l -prime radical are obtained. Also, some results concerned with the properties of ordered homomorphisms, strictly ordered homomorphisms and lattice homomorphisms of lattice ordered algebras are presented.

Keywords: lattice $\mathcal{K}$ -ordered algebra over a field, ordered homomorphism, prime ideal, prime radical.

Введение

Если $L = \langle L; +; \cdot \rangle$ — линейная алгебра над частично упорядоченным полем F , то говорят (см., например, [7]), что на алгебре L определен $\mathcal{K}$ -порядок $\leq$, если:

- (1) $\langle L; +; \leq \rangle$ является частично упорядоченной группой;
- (2) из $x \leq y$ следует, что $\gamma x \leq \gamma y$ для любых $x, y \in L$ и $\gamma > 0$, $\gamma \in F$;
- (3) из $x \geq 0$ следует, что $x + xy \geq 0$ и $x + yx \geq 0$ для всех $y \in L$.

Если при этом группа $\langle L; +; \leq \rangle$ решеточно упорядоченна, то алгебра L над полем F называется *решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной*, или *l -алгеброй*.

Определение такого упорядочения было введено В.М. Копытовым для алгебр Ли в 1972 году в работе [4], в которой он, в частности, отмечает, что это определение порядка можно рассматривать не только для алгебр Ли, но и для произвольных алгебр над упорядоченным полем. Данная статья продолжает изучение свойств $\mathcal{K}$ -порядка для произвольных линейных алгебр над частично упорядоченным полем, начатое автором совместно с Е.Е. Ширшовой в работе [9].

Для многих алгебраических систем, в том числе и упорядоченных, исследован их первичный радикал (см. [1], [6], [7], [10]–[15], [17]), в частности, изучены свойства факторсистемы данной системы по ее первичному радикалу. Целью данной работы является характеристика l -первичного радикала решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем с точки зрения свойств ее факторалгебры по l -первичному радикалу.

В статье используется терминология, общепринятая для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [3, 16]).

При исследовании решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр используются гомоморфизмы алгебр, согласованные с порядками на данных алгебрах. Для эффективной работы с ними в первом параграфе рассмотрены понятия порядкового, строгого порядкового и решеточного гомоморфизма $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([2], стр. 597). Пусть L_1 и L_2 — частично $\mathcal{K}$ -упорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем F . Отображение $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ называется *порядковым гомоморфизмом* (*о-гомоморфизмом*), если φ является и гомоморфизмом алгебр L_1 и L_2 и гомоморфизмом частично упорядоченных множеств L_1 и L_2 , то есть для всех элементов $x, y \in L_1$ и для любого $\gamma \in F$ выполнены соотношения:

- 1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$; 2) $\varphi(\gamma x) = \gamma \varphi(x)$; 3) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$;
- 4) если $x \geq y$, то $\varphi(x) \geq \varphi(y)$.

Если порядковый гомоморфизм φ частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр L_1 и L_2 является изоморфизмом этих алгебр и при этом φ^{-1} удовлетворяет условию 4) определения 1, то φ называется *порядковым изоморфизмом* частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр L_1 и L_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если L_1 и L_2 — частично $\mathcal{K}$ -упорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем, L_1^+ и L_2^+ — конусы положительных элементов этих алгебр, $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — их порядковый гомоморфизм и $\varphi(L_1^+) = L_2^+ \cap \varphi(L_1)$, то φ называется строгим порядковым гомоморфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 ([2], стр. 597). Если L_1 и L_2 — l -алгебры над частично упорядоченным полем и $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ — такой гомоморфизм алгебр, что для любых $x, y \in L_1$ выполнены условия

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \quad \text{и} \quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y),$$

то φ называется решеточным гомоморфизмом l -алгебры L_1 в l -алгебру L_2 или l -гомоморфизмом.

В первом параграфе доказаны основные свойства ядра, образа, прообраза при порядковом, строгом порядковом и решеточном гомоморфизмах. В этом параграфе показано, что l -гомоморфизм решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр является строгим порядковым гомоморфизмом:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Всякий решеточный гомоморфизм l -алгебр над частично упорядоченным полем является строгим порядковым гомоморфизмом.

Также в первом параграфе доказана вторая теорема об изоморфизмах для решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр.

ТЕОРЕМА 1 (вторая теорема об изоморфизмах). Если L и L_1 — l -алгебры над частично упорядоченным полем и $\varphi : L \rightarrow L_1$ — их l -эпиморфизм, то для любого l -идеала I_1 из L_1 и его полного прообраза I из L факторалгебры L/I и L_1/I_1 l -изоморфны.

Напомним, что l -первичным радикалом $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$ решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем называется пересечение всех ее l -первичных идеалов, то есть всех таких l -идеалов J алгебры L , для каждого из которых произведение

$$UV = \left\{ z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} x_i y_i \mid x_i \in U, y_i \in V \right\}$$

любых двух ненулевых l -идеалов U и V факторалгебры L/J отлично от множества $\{J\}$ (см., например, [7]).

Во втором параграфе описаны свойства l -первичного радикала факторалгебры L/R решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры L по ее l -первичному радикалу $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$. Основным результатом этого параграфа является утверждение о том, что l -первичный радикал l -алгебры над частично упорядоченным полем является радикалом в смысле Куроша–Амицура. Это утверждение вытекает из следующих доказанных во втором параграфе теорем и предложения.

ТЕОРЕМА 2. Для l -алгебры L над частично упорядоченным полем и ее l -первичного радикала $R = l\text{-rad}_K(L)$ выполняется соотношение

$$l\text{-rad}_K(L/R) = \{0\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Если $\varphi : L \rightarrow L_1$ — решеточный гомоморфизм l -алгебр L и L_1 над частично упорядоченным полем F , то $\varphi(l\text{-rad}_K(L)) \subseteq l\text{-rad}_K(\varphi(L))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. l -первичный радикал $R = l\text{-rad}_K(L)$ решеточно K -упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем является наибольшим l -идеалом в L , удовлетворяющим условию $l\text{-rad}_K(R) = R$.

1. Свойства порядковых гомоморфизмов частично K -упорядоченных алгебр

В этом параграфе изучаются свойства факторалгебр решеточно K -упорядоченных алгебр по их l -идеалу, содержатся доказательства утверждений, раскрывающих взаимосвязь между l -идеалами в решеточно K -упорядоченной алгебре и ее факторалгебре по некоторому l -идеалу, изучаются свойства порядковых и решеточных гомоморфизмов l -алгебр над частично упорядоченными полями.

Вначале рассмотрим несколько свойств l -идеалов l -алгебры над частично упорядоченным полем, которые будут необходимы нам при дальнейшем изложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([8], лемма 21, [7], предложение 4). Следующие условия на идеал I решеточно K -упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем эквивалентны:

- 1) I является выпуклой подрешеткой в L ;
- 2) для любых $x \in I$ и $y \in L$ из $|y| \leq |x|$ следует, что $y \in I$.

Для l -алгебр справедлива теорема о гомоморфизмах.

ТЕОРЕМА 4 ([8], теорема 15). Если φ — решеточный гомоморфизм l -алгебры L_1 в l -алгебру L_2 , то ядро I этого гомоморфизма является l -идеалом в L_1 и существует l -изоморфизм $\bar{\varphi}$ естественно упорядоченной факторалгебры L_1/I в L_2 такой, что $\bar{\varphi}(x + I) = \varphi(x)$ для любого $x \in L_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Так как l -гомоморфизм φ l -алгебр L_1 и L_2 является l -гомоморфизмом l -групп $\langle L_1; + \rangle$ и $\langle L_2; + \rangle$, который, в свою очередь, является строгим порядковым гомоморфизмом этих групп (см., например, [3], стр. 33), то φ — порядковый гомоморфизм l -алгебр L_1 и L_2 .

Для любого $x \in L_1^+$ выполняется соотношение $x = x \vee 0$, из которого по определению 3 следует $\varphi(x) = \varphi(x) \vee \varphi(0) = \varphi(x) \vee 0$. Таким образом, $\varphi(x) \in L_2^+$, и значит, $\varphi(L_1^+) \subseteq L_2^+$. Отсюда, учитывая $\varphi(L_1^+) \subseteq \varphi(L_1)$, имеем

$$\varphi(L_1^+) \subseteq L_2^+ \cap \varphi(L_1).$$

Если $y \in L_2^+ \cap \varphi(L_1)$, то $y = \varphi(x)$ для некоторого $x \in L_1$ и $y = y \vee 0$, откуда по определению l -гомоморфизма получаем $y = \varphi(x) \vee \varphi(0) = \varphi(x \vee 0)$. Значит, $y \in \varphi(L_1^+)$, и поэтому $L_2^+ \cap \varphi(L_1) \subseteq \varphi(L_1^+)$.

Следовательно, $\varphi(L_1^+) = L_2^+ \cap \varphi(L_1)$. Применение определения 2 завершает доказательство. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 ([8], теорема 25). *Для любого l -идеала T l -алгебры L над частично упорядоченным полем полный прообраз каждого l -идеала факторалгебры L/T при каноническом гомоморфизме $\varepsilon : L \rightarrow L/T$ является l -идеалом l -алгебры L .*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Если L и L_1 — решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем F и $\varphi : L \rightarrow L_1$ — их решеточный гомоморфизм, то полный прообраз любого l -идеала из L_1 является l -идеалом в L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольный l -идеал I_1 в L_1 и его полный прообраз $A = \{x \in L \mid \varphi(x) \in I_1\}$. Так как $\varphi(x), \varphi(y) \in I_1$ для $x, y \in A$, то по определению 3 и определению l -идеала $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \in I_1$, $\varphi(\gamma x) = \gamma \varphi(x) \in I_1$ и $\varphi(xz) = \varphi(x)\varphi(z) \in I_1$ для любых элементов $z \in L$ и $\gamma \in F$. Поэтому $x + y, \gamma x, xz \in A$, и значит, A — идеал в L .

Пусть $|y| \leq |x|$ для элементов $x \in A$, $y \in L$. Применяя к φ предложение 1, а к неравенству $|x| - |y| \geq 0$ — определение 2, получаем $\varphi(|x| - |y|) \geq 0$ и $\varphi(|x| - |y|) = \varphi(|x|) - \varphi(|y|)$, то есть $\varphi(|y|) \leq \varphi(|x|)$. При этом, учитывая определение 3, имеем $\varphi(|y|) = \varphi(y) \vee \varphi(-y) = |\varphi(y)|$ и $\varphi(|x|) = \varphi(x) \vee \varphi(-x) = |\varphi(x)|$. Значит, $|\varphi(y)| \leq |\varphi(x)|$. Так как $\varphi(x) \in I_1$, $\varphi(y) \in L_1$ и I_1 — l -идеал в L_1 , то $\varphi(y) \in I_1$ по предложению 3, поэтому $y \in A$. Остается применить предложение 3 к идеалу A . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

Композиция $\psi = \varepsilon \circ \varphi$ канонического l -эпиморфизма $\varepsilon : L_1 \rightarrow L_1/I_1$ и l -эпиморфизма $\varphi : L \rightarrow L_1$ из условия теоремы также является l -эпиморфизмом, так как $\psi : L \rightarrow L_1/I_1$ и $\psi(L) = \varepsilon(\varphi(L)) = \varepsilon(L_1) = L_1/I_1$. Применяя к ψ теорему 4, получим, что существует l -изоморфизм между $L/\text{Ker } \psi$ и $\text{Im } \psi$, и при этом $\text{Im } \psi = L_1/I_1$.

Рассмотрим $\text{Ker } \psi = \{x \in L \mid \psi(x) = I_1\}$. Поскольку $\psi(x) = \varepsilon(\varphi(x)) = \varphi(x) + I_1$, то $\text{Ker } \psi = \{x \in L \mid \varphi(x) \in I_1\}$ является полным прообразом l -идеала I_1 , то есть $\text{Ker } \psi = I$. Следовательно, l -алгебры L/I и L_1/I_1 l -изоморфны. $\square$

Для доказательства свойств l -первичных идеалов l -алгебры L нам понадобится следующее утверждение. Его доказательство аналогично доказательствам теорем 13 и 25 из [8] для l -алгебр Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для любой l -алгебры L над частично упорядоченным полем и ее l -идеалов I и A множество $\bar{A} = \{T \in L/I \mid T \cap A \neq \emptyset\}$ является l -идеалом факторалгебры L/I .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если L и L_1 — l -алгебры над частично упорядоченным полем F и $\varphi : L \rightarrow L_1$ — их l -изоморфизм, то для всякого l -идеала I из L множество $A_1 = \{\varphi(x) \mid x \in I\}$ является l -идеалом в L_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $x_1, y_1 \in A_1$ и $z_1 \in L_1$, то $x_1 = \varphi(x)$, $y_1 = \varphi(y)$ и $z_1 = \varphi(z)$ для некоторых $x, y \in I$ и $z \in L$. Отсюда по определению 3 и определению l -идеала следует, что $x_1 + y_1 = \varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x + y) \in A_1$, $xz_1 = \varphi(x)\varphi(z) = \varphi(xz) \in A_1$ и $\gamma x_1 = \gamma\varphi(x) = \varphi(\gamma x) \in A_1$ для любого $\gamma \in F$. Таким образом, A_1 — идеал в L_1 .

При выполнении для элементов $x_1 \in A_1$ и $z_1 \in L_1$ условия $|z_1| \leq |x_1|$ имеем $|\varphi(z)| \leq |\varphi(x)|$. Используя рассуждения из доказательства предложения 5, получаем неравенство $\varphi(|z|) \leq \varphi(|x|)$, применение к которому l -изоморфизма φ^{-1} дает неравенство $|z| \leq |x|$. Отсюда по предложению 3 следует, что $z \in I$, и поэтому $z_1 \in A_1$. Это, в свою очередь, означает, что по предложению 3 идеал A_1 является l -идеалом в L_1 . $\square$

2. Свойства l -первичных радикалов l -алгебр

Данный параграф содержит описание свойств l -первичного радикала произвольной решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры, в частности, здесь описаны свойства l -первичного радикала факторалгебры L/R l -алгебры L по ее l -первичному радикалу $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$. Для доказательства утверждений данного параграфа необходимы следующие предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если L — l -алгебра над частично упорядоченным полем, I и J — ее l -первичные l -идеалы и $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L) = R$ — ее l -первичный радикал, то для канонического гомоморфизма $\varepsilon : L \rightarrow L/R$ выполняется соотношение $\varepsilon(I \cap J) = \varepsilon(I) \cap \varepsilon(J)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\varepsilon(I \cap J) \subseteq \varepsilon(I) \cap \varepsilon(J)$. Докажем обратное включение. Если $x \in \varepsilon(I) \cap \varepsilon(J)$, то существуют элементы $a \in I$ и $b \in J$ такие, что $x = \varepsilon(a)$ и $x = \varepsilon(b)$, где $\varepsilon(a) = a + R$ и $\varepsilon(b) = b + R$. Отсюда следует, что $a - b \in R$, и значит, $a - b \in I$ и $a - b \in J$ по определению l -первичного радикала. Поэтому $a, b \in (I \cap J)$ и $x \in \varepsilon(I \cap J)$, а это влечет включение $\varepsilon(I) \cap \varepsilon(J) \subseteq \varepsilon(I \cap J)$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение и доказательство предложения 8 может быть перенесено на любое количество l -первичных l -идеалов решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры.

Основное свойство l -первичных идеалов l -алгебры над частично упорядоченным полем сформулировано в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9 ([7], теорема 2). Для l -идеала P l -алгебры L над частично упорядоченным полем следующие условия эквивалентны:

(а) P — l -первичный идеал;

(б) для любых l -идеалов I_1 и I_2 l -алгебры L из $I_1 I_2 \subseteq P$ следует хотя бы одно из соотношений $I_1 \subseteq P$, $I_2 \subseteq P$.

Опишем свойства факторалгебры L/R решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры L по ее l -первичному радикалу $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для любой l -алгебры L над частично упорядоченным полем и ее l -первичного радикала $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$ существует взаимно однозначное соответствие между l -первичными l -идеалами из L и l -первичными l -идеалами факторалгебры L/R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим канонический l -эпиморфизм $\varepsilon : L \rightarrow L/R$ l -алгебры L на факторалгебру $L_1 = L/R$ и произвольный l -первичный идеал P_1 l -алгебры L_1 . По предложению 4 полный прообраз P l -идеала P_1 при l -гомоморфизме ε является l -идеалом в L .

Покажем, что P — l -первичный идеал в L . Для этого возьмем l -идеалы U и V в L/P , для которых $U \neq P$ и $V \neq P$, то есть $U \supset P$ и $V \supset P$. Применяя к l -алгебрам L и L_1 теорему 1, получим, что для l -идеала P_1 из L_1 и его полного прообраза P существует l -изоморфизм φ между L/P и L_1/P_1 . Значит, по предложению 7 l -идеалам U и V из L/P соответствуют l -идеалы U_1 и V_1 в L_1/P_1 . Допустив, что $U_1 = P_1$, из $U_1 = \varphi(U) = P_1$ получим $U = P$, что противоречит выбору l -идеала U . Поэтому $U_1 \neq P_1$ и, аналогично, $V_1 \neq P_1$. Отсюда, в силу l -первичности идеала P_1 , по условию (б) предложения 9 следует, что $U_1 V_1 \neq P_1$. Предположив, что $UV = P$, получим $U_1 V_1 = \varphi(UV) = \varphi(P) = P_1$, противоречие. Следовательно, $UV \neq P$. Остается применить к l -идеалу P условие (б) предложения 9.

Аналогично, с использованием предложений 5, 6 и 9, а также теоремы 1 можно показать, что образ P'_1 любого l -первичного l -идеала P' l -алгебры L при каноническом l -гомоморфизме ε является l -первичным l -идеалом в L/R . $\square$

Следующая теорема дает описание l -первичного радикала факторалгебры решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры по ее l -первичному радикалу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

Для l -алгебры $L_1 = L/R$ рассмотрим $R_1 = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L_1) = \bigcap_{P_1 \in \mathcal{P}_1} P_1$, где $\mathcal{P}_1$ — множество всех l -первичных идеалов из L_1 . По предложению 10 каждый l -первичный идеал P_1 соответствует некоторому l -первичному l -идеалу P из L , и при этом $P_1 = \varepsilon(P)$. Следовательно, $R_1 = \bigcap_{P_1 \in \mathcal{P}_1} P_1$. Так как по предложению 10 множества l -первичных идеалов в l -алгебрах L и L/R связаны взаимно однозначным соответствием, то $R_1 = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \varepsilon(P)$, где $\mathcal{P}$ — множество всех l -первичных идеалов из L . Отсюда, используя предложение 8, получаем, что $R_1 = \varepsilon\left(\bigcap_{P \in \mathcal{P}} P\right) = \varepsilon(R) = 0$ в L/R . Следовательно, $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L/R) = \{0\}$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. l -алгебра L над частично упорядоченным полем называется l -полупервичной, если для любого l -идеала $I \neq \{0\}$ из L верно соотношение $I^2 \neq \{0\}$.

Необходимое и достаточное условие l -полупервичности решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры сформулировано в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5 ([5], теорема 1). Решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра L над частично упорядоченным полем является l -полупервичной тогда и только тогда, когда $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L) = \{0\}$.

Благодаря введенному понятию l -полупервичности l -алгебры и теореме 5 можно дать эквивалентную формулировку теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой l -алгебры L над частично упорядоченным полем и ее l -первичного радикала $R = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$ решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра L/R является l -полупервичной алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 имеем $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L/R) = \{0\}$, откуда по теореме 5 следует l -полупервичность l -алгебры L/R . $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.

Покажем, что существует взаимно однозначное соответствие между l -первичными идеалами из L и l -первичными идеалами из $\varphi(L)$. Если P — l -первичный l -идеал в алгебре L , то множество $\bar{P} = \{x + \text{Ker } \varphi \mid x \in P\}$ является по предложению 6 l -идеалом факторалгебры $L/\text{Ker } \varphi$. Так как по теореме 4 алгебры $L/\text{Ker } \varphi$ и $\varphi(L)$ l -изоморфны, то согласно предложению 7 l -идеалу $\bar{P}$ из $L/\text{Ker } \varphi$ соответствует l -идеал $P_1 = \{\varphi(x) \mid x + \text{Ker } \varphi \in \bar{P}\} = \{\varphi(x) \mid x \in P\}$ в $\varphi(L)$.

Аналогично, если P_1 — произвольный l -первичный l -идеал из $\varphi(L)$, то по предложению 5, примененному к l -эпиморфизму $\varphi : L \rightarrow \varphi(L)$, получаем, что множество $P = \{x \in L \mid \varphi(x) \in P_1\}$ — l -идеал в L .

В каждом из полученных выше случаев по теореме 1 имеем l -изоморфизм между факторалгебрами L/P и $\varphi(L)/P_1$, благодаря которому получаем, что l -идеал P является l -первичным в L тогда и только тогда, когда l -идеал P_1 является l -первичным в $\varphi(L)$.

Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех l -первичных идеалов из L . Тогда $\varphi(l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)) = \varphi(\bigcap_{P \in \mathcal{P}} P) \subseteq \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \varphi(P)$. Так как по доказанному выше $\varphi(P)$ — l -первичный идеал в $\varphi(L)$, и каждый l -первичный идеал в $\varphi(L)$ является образом некоторого l -первичного идеала из L , то $\bigcap_{P \in \mathcal{P}} \varphi(P) = l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(\varphi(L))$. Таким образом, $\varphi(l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)) \subseteq l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(\varphi(L))$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.

Ясно, что $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(R) = R$. Рассмотрим такой l -идеал J в L , для которого $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(J) = J$. Тогда J является l -первичным идеалом в L и $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(J) = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} P$,

где $\mathcal{P}$ — множество всех l -первичных идеалов в J . Поэтому в J нет l -первичных идеалов, отличных от J . Отсюда получаем, что $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L) = J \cap \mathcal{P}_1$, где $\mathcal{P}_1$ — множество l -первичных идеалов T в L , таких что $T \not\subseteq J$. Значит, $J \subseteq l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(L)$. $\square$

Из теорем 2, 3 и предложения 2 следует, что l -первичный радикал решеточно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем является радикалом в смысле Куроша–Амицура (см., например, [1, гл. 2, § 1]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. М.: Наука, 1979. 496 с.
2. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные алгебры Ли // Сиб. мат. журн. 1977. Т. XVIII, № 3. С. 595–607.
3. Копытов В. М. Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984. 320 с.
4. Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 3. С. 295–325.
5. Кочетова Ю. В. Первичные и полупервичные решеточно упорядоченные алгебры Ли // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14, № 7. С. 137–143.
6. Кочетова Ю. В. Первичный радикал решеточно упорядоченных алгебр Ли // Успехи математических наук. 2008. Т. 63, вып. 5. С. 191–192.
7. Кочетова Ю. В. О l -первичном радикале решеточно упорядоченных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2011–2012. Т. 17, № 5. С. 55–68.
8. Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах частично упорядоченных алгебр Ли // Избранные вопросы алгебры: сборник статей, посвященный памяти Н. Я. Медведева. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. С. 131–142.
9. Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, № 1. С. 53–63.
10. Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 1. С. 13–26.
11. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971.
12. Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решеточно упорядоченных групп // Вестник Моск. ун-та. Сер. Математика. Механика. 1990. № 2. С. 84–86.

13. Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решеточно упорядоченных колец // Сб. работ по алгебре. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. С. 178—184.
14. Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал pl -групп // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 2. С. 193—199.
15. Пихтильников С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005. 130 с.
16. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.
17. Шукин К. К. RI -разрешимый радикал группы // Мат. сб. 1960. Т. 52, № 4. С. 1021—1031.

Московский педагогический государственный университет
Поступило 13.08.2013