ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-536-542

Значения гипергеометрических F-рядов в полиадических лиувиллевых точках

Е. Ю. Юденкова

Юденкова Екатерина Юрьевна — аспирант, Московский педагогический государственный университет; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (г. Москва).
e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Аннотация

В настоящей работе доказывается бесконечная алгебраическая независимость значений гипергеометрических F – рядов в полиадических лиувиллевых точках. Гипергеометрическая функция – это функция вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \cdots (\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_s)_n \, n!} z^n, |z| < 1.$$

F – ряд – это ряд вида $f_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$, коэффициенты которого a_n удовлетворяют некоторым арифметическим свойствам. Эти ряды сходятся в поле $\mathbb{Q}_p$ – p – адических чисел и их алгебрических расширений $\mathbb{K}_v$. Полиадическое число – это ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n!, a_n \in \mathbb{Z}$. Лиувиллево число – это вещественное число x такое, что для всех положительных челых чисел n существует бесконечное число пар целых чисел $(p, q), q > 1$ таких, что $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$. Полиадическое лиувиллево число α обладает тем свойством, что для любых чисел P, D существует целое число $|A|$ такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство $|\alpha - A|_p < A^{-D}$.

Ключевые слова: гипергеометрические F-ряды, полиадические лиувиллевы точки.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
Е. Ю. Юденкова. Значения гипергеометрических F-рядов в полиадических лиувиллевых точках // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 536–542.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-536-542

Values of hypergeometric F-series at polyadic Liouvillea points

E. Yu. Yudenkova

Yudenkova Ekaterina Yurievna — graduate student, Moscow Pedagogical State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: yudenkovaey@gmail.com

Abstract

This paper proves infinite algebraic independence of the values of hypergeometric $F-$series at polyadic Liouville points. Hypergeometric functions are defined for $|z|<1$ by the power series:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_r)_n}{(\beta_1)_n\ldots(\beta_s)_n\, n!}z^n.$$
$F-$series have form $f_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n! z^n$ whose coefficients a_n satisfy some arithmetic properties. These series converge in the field $\mathbb{Q}_p$ of $p-$ adic numbers and their algebraic extensions $\mathbb{K}_v$. Polyadic number is a series of the form $\sum_{n=0}^{\infty}a_n n!, a_n\in\mathbb{Z}$. Liouville number is a real number x with the property that, for every positive integer n, there exist infinitely many pairs of integers (p,q) with $q>1$ such that $0<\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^n}$. The polyadic Liouville number α has the property that for any numbers P,D there exists an integer $|A|$ such that for all primes $p\le P$ the inequality $|\alpha-A|_p<A^{-D}$.

Keywords: hypergeometric F-series, polyadic Liouville numbers.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
E. Yu. Yudenkova, 2021, “Values of hypergeometric F-series at polyadic Liouvillea points”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 536–542.

Введение

В данной работы доказывается бесконечная алгебраническая независимость гипергеометрических F – рядов в полиадических лиувиллевых точках.

Символ Похгаммера определяется равенствами

$$(a)_0=1,(a)_n=a(a+1)\ldots(a+n-1),n\ge 1$$

Дадим определение обобщенных гипергеометрических функций и F – ряда.

Определение 1. *Пусть $\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{C},b_j\ne 0,-1,-2,\ldots,i=1,\ldots,l,j=1,\ldots,m$, то функции вида*
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\ldots(\alpha_l)_n}{(\beta_1)_n\ldots(\beta_m)_n}\left(\frac{t}{z}\right)^{tn}$$
называются обобщёнными гипергеометрическими функциями.

Определение 2. *Ряд*
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n! z^n$$
принадлежит классу $F(\mathbb{K},c_1,c_2,c_3,q)$, если его коэффициенты принадлежат полю $\mathbb{K}$ и удовлетворяют условиям

1. *$|\overline{a_n}|=O(\exp(c_1 n)),n\to\infty$ (где для алгебраического числа α символ $|\overline{\alpha_n}|$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел);*

2. *существует последовательность натуральных чисел* $d_n = q^n d_{0,n}$, *где* $q \in \mathbb{N}$, *такая, что* $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, n = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, n$.

При этом $d_{0,n}$ *делятся только на простые числа* p, *не большие* $c_2 n$, *причём*

$$\operatorname{ord}_p d_{0,n} \leqslant c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

Полиадическое лиувиллево число α обладает тем свойством, что для любых чисел P, D существует целое число $|A|$ такое, что для всех простых чисел $p \leq P$ выполняется неравенство

$$|\alpha - A|_p < A^{-D}.$$

Настоящая работа развивает результаты В.Г.Чирского [8].

Перейдем к формулировкам утверждений. Пусть

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k, \tag{1}$$

где $\theta_k \in \mathbb{K}$, причем этот ряд сходится во всех полях $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Обозначим

$$\Theta_n = \sum_{k=0}^{n} \theta_k.$$

Для семейств вещественных чисел $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ и $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ будем использовать следующее обозначение

$$\overline{a} \approx \overline{b}$$

если существует перестановка $i_1, \ldots, i_m$ чисел $1, \ldots, m$ такая, что $b_j - a_{i_j} \in \mathbb{Z}, j = 1, \ldots, m$. Также под $\overline{a} + c$ понимается $(a_1 + c, \ldots, a_m + c)$.

Теорема 1. *Пусть ряд*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu_1)_n \ldots (\mu_r)_n}{(\lambda_1)_n \ldots (\lambda_s)_n} (zt)^{tn}, \tag{2}$$

в котором множество

$$S = \{\mu_1, \ldots, \mu_r; \lambda_1, \ldots, \lambda_s\}, r > s \tag{3}$$

состоит из нецелых рациональных параметров, а

$$t = r - s$$

чётно $(t = 2k)$ *и для множества параметров* S *выполнены следующие условия:*

$$\mu_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, t + s, j = 1, \ldots, s.$$

Пусть для всех d *– общих делителей чисел* t *и* s *– либо не выполняется соотношение* $\overline{\mu} + \frac{1}{d} \approx \overline{\mu}$, *либо не выполняется соотношение* $\overline{\lambda} + \frac{1}{d} \approx \overline{\lambda}$. *Также пусть не выполняется ни одно из следующих условий:*

1. *если* $s = 0$, *то существуют* $x_0, x_1, \ldots x_{k-1} \in \mathbb{C}$ *такие, что*

$$(\bar{\mu} + x_0) \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \ldots, x_{k-1}, -x_{k-1} \right);$$

2. если $s > 0$ – чётно ($s = 2u$), то существуют $x_0, x_1, \ldots x_{k+s-1} \in \mathbb{C}$ такие, что либо

$$(\bar{\mu} + x_0) \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \ldots, x_{k+q-1}, -x_{k+q-1}\right),$$

$$\left(\bar{\lambda} + x_0\right) \approx (x_{k+q}, -x_{k+q}, \ldots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}),$$

либо

$$(\bar{\mu} + x_0) \approx (x_1, -x_1, \ldots, x_{k+q}, -x_{k+q}),$$

$$\left(\bar{\lambda} + x_0\right) \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_{k+q+1}, -x_{k+q+1}, \ldots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}\right);$$

3. если $s > 0$ – нечётно ($s = 2u + 1$), то существуют $x_0, x_1, \ldots x_{+sk-1} \in \mathbb{C}$ такие, что

$$(\bar{\mu} + x_0) \approx (0, x_1, -x_1, \ldots, x_{k+q-1}, -x_{k+q-1}),$$

$$\left(\bar{\lambda} + x_0\right) \approx \left(-\frac{1}{2}, x_{k+q}, -x_{+q}, \ldots, x_{k+s-1}, -x_{k+s-1}\right).$$

Пусть ξ – ряд (1), где θ_k – целые числа из поля $\mathbb{K}_v, v \in V_0$. Пусть $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству

$$p \le m \exp(\ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{4}$$

и любого нормирования v, продолжающего p - адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$, выполняется неравенство

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|), |\Theta_n| > \exp(\ln^{2+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{5}$$

Тогда для любого многочлена $P(y_1, \ldots, y_m)$, коэффициенты которого – целые числа из поля $\mathbb{K}$, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v, продолжающих p – адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$ такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$|P(\xi)|_v = |P(f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(r-1)}(\xi))|_v > 0.$$

Доказательство теоремы

Лемма 1. *[8] Если параметры (3) являются рациональными числами, то соответствующий ряд (2) будет F – рядом.*

Лемма 2. *[8] Для любого множества параметров (3) ряд (2) представляет собой формальное решение линейного дифференциального уравнения:*

$$\left(\prod_{j=1}^{s}\left(z\frac{d}{dz} + t\left(\lambda_j - 1\right)\right) - z^t \prod_{i=1}^{r}\left(z\frac{d}{dz} + t\mu_i\right)\right) y = \prod_{j=1}^{s} t\left(\lambda_j - 1\right)$$

Лемма 3. *[8] При условиях теоремы 1. ряд $f(z)$ является F – рядом.*

Теорема 2. *Пусть F – ряды $f_1, f_2, \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы уравнений*

$$y_i'(z) = Q_{0,i}(z) \sum_{j=1}^{m} Q_{j,i}(z) y_j(z), i = 1, \ldots, m,$$

$$Q_{j,i}(z) \in \mathbb{K}(z), i = 1, \dots, m, j = 0, \dots, m. \tag{6}$$

и алгебраически независимы над полем $\mathbb{K}(z)$*. Пусть* ξ *– ряд вида (1). Пусть* $\epsilon > 0, 0 < \delta < 1$ *и существует бесконечное множество номеров n таких, что для всех простых чисел p, удовлетворяющих неравенству*

$$p \leq m \exp(\ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{7}$$

и любого нормирования v, продолжающего p - адическое нормирование в поле $\mathbb{K}$*, выполняется неравенство*

$$|\xi - \Theta_n|_v < \exp(-(\exp(\ln^{1+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \ln^{1+2\epsilon} |\overline{\Theta_n}|), |\Theta_n| > \exp(\ln^{2+\epsilon} |\overline{\Theta_n}|) \tag{8}$$

Тогда для любого многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$*, коэффициенты которого – целые числа из поля* $\mathbb{K}$*, не все равные нулю, существует бесконечное множество простых чисел p и нормирований v, продолжающих p – адическое нормирование в поле* $\mathbb{K}$ *такие, что в поле* $\mathbb{K}_v$ *выполняется неравенство*

$$|P(\xi)|_v = |P(f_1(\xi), f_2(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v > 0.$$

Доказательство теоремы 2 приведено в предыдущей статье [Чебышевский сборник, т.22, вып.2, «Бесконечная линейная и алгебраическая независимость значений F-рядов в полиадических лиувиллевых точках»].

Применение лемм 1 – 3 и теоремы 2 завершает доказательство теоремы 1.

Заключение

В настоящей работе была доказана бесконечная алгебраическая независимость значений гипергеометрических F – рядов в полиадических лиувиллевых точках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галочкин А. И. Об алгебраической независимости значений E – функций в некоторых трансцендентных точках // Вестн. Московского университета. Сер. 1, Математика, механика. 1970. № 5. С. 58-63.

2. Bombieri E. On G – functions // Recent Progress in Analytic Number Theory. V. 2. London: Academic Press, 1981. P. 1-68.

3. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987.

4. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2019, vol. 26, no. 2, pp. 175-184.

5. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика, механика. — Изд-во Моск. универстита (М), 2015. № 1. С. 59-61.

6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая, 2017. Том 81, № 1. С. 215-232 DOI.

7. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F-рядов // Доклады Академии наук. — Изд-во Наука (М), 2018. Том 483, № 1. С. 257-259.

8. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Generalized Hypergeometric F – Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2020, vol. 27, no. 2, pp. 175-184.

9. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук. — Изд-во Наука (М), 2014. Том 459, № 6. С. 677-679.

10. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая, 2014. Том 78, № 6. С. 193-210

11. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2011. Том 12, № 4. С. 129-133.

12. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. 1990. Том 48, № 2. С. 123-127.

13. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. Наука (М). 2014. Том 459, № 6. С. 677-679.

14. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. 2017. Том 81, выпуск 2. С. 215-232.

15. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник. 2016. Том 17, № 3. С. 180-185.

16. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, № 1. С. 254-264.

17. André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. // Inst. Math., Jussieu.

18. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.

19. Matala–Aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations. // J. Number Theory. 2018. 186, pp.202-210.

20. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII, №2. pp. 241-260.

REFERENCES

1. Galochkin A. I. 1970, "On algebraic independence of the values of E – functions at certain transcendental points", *Moscow University Mathematics Bulletin*, iss. 1, no. 5, pp. 58-63.

2. Bombieri E., 1981, "On G – functions", *Recent Progress in Analytic Number Theory*, Academic Press (London), vol. 2, pp. 1-68.

3. Shidlovskii, A. B. 1989, "Transcendental numbers", *Studies in mathematics*, Walter de Gruyter (Berlin, New York), vol. 12

4. Chirskii V. G. 2019, "Product formula, global relations and polyadic integers", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2019 vol. 26, no. 2, pp. 175-184.

5. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of Euler series“, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Allerton Press Inc.(United States), vol. 70, no. 1, pp. 41-43.

6. Chirskii, V. G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 81, no. 2, pp. 444-461.

7. Chirskii, V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric F-series“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 98, no. 3, pp. 589-591.

8. Chirskii V. G. Arithmetic Properties of Generalized Hypergeometric $F-$ Series // *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), 2020, vol. 27, no. 2, pp. 175-184.

9. Chirskii, V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 90, no. 3, pp. 766-768.

10. Chirskii, V. G. 2014, “On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 78, no. 6, pp. 1244-1260.

11. Chirskii, V. G. 2011, “Estimates of linear forms and polynomials in polyadic numbers”, *Chebyshevskii Sb.*, 12:4, pp.129-133.

12. Chirskii, V. G. 1990, “Global relations”, *Mat. Zametki*, vol. 48, no. 2, pp. 123–127

13. Chirskii, V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), vol. 90, no. 3, pp. 766-768.

14. Chirskii, V.,G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), vol. 81, no. 2, pp. 444-461.

15. Chirskii, V. G. 2016, “On transformations of periodic sequences”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 3, pp. 191–196.

16. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integers”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.

17. André Y. 2000, “Séries Gevrey de type arithmétique“, *Annals of Mathematics*, vol. 151, pp. 705-740

18. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.

19. Matala–Aho T. & Zudilin W. 2018, “Euler factorial series and global relations“, *J. Number Theory*, vol. 186, pp. 202-210.

20. Bertrand, D., Chirskii, V. G. & Yebbou, Y. 2004, “Effective estimates for global relations on Euler-type series“, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241-260.