

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 511

БЕСКВАДРАТНЫЕ ЧИСЛА В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $[\alpha n]$

Д. В. Горяшин (г. Москва)

Аннотация

В работе доказывается асимптотическая формула для числа бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $n \leq N$, где α — алгебраическое число или иррациональное, имеющее ограниченные неполные частные.

Ключевые слова: бесквадратные числа, числовая последовательность, асимптотическая формула, тригонометрические суммы.

SQUAREFREE NUMBERS IN THE SEQUENCE $[\alpha n]$

D. V. Goryashin (Moscow)

Abstract

An asymptotic formula for the number of squarefree integers of the form $[\alpha n]$ is proved in the paper, where α is an algebraic number or a number with restricted partial quotients.

Keywords: squarefree numbers, Beatty sequence, asymptotic formula, exponential sums.

Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и пусть $S(\alpha, N)$ равно количеству бесквадратных чисел вида $[\alpha n]$, $n \leq N$. Оно равно значению суммы

$$S = S(\alpha, N) = \sum_{n \leq N} \mu^2([\alpha n]),$$

где $\mu(n)$ — функция Мебиуса. Разными авторами исследовалось асимптотическое поведение величины S при $N \rightarrow \infty$ с теми или иными ограничениями на число α .

Так, в работе [1] доказано, что если α — иррациональное число конечного типа (например, имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим), то

$$S = \frac{6}{\pi^2} N + O\left(\frac{N \ln \ln N}{\ln N}\right).$$

С другой стороны, в работе [2] доказана асимптотическая формула для средних значений мультипликативных функций для почти всех значений α . В применении к мультипликативной функции $\mu^2(n)$ эта теорема дает

$$S = \frac{6}{\pi^2} N + O(N^{\frac{2}{3}+\varepsilon})$$

для почти всех α . При этом, в отличие от работы [1], метод данной статьи не позволяет указать какие-либо конкретные значения α , для которых верно это равенство.

Настоящая статья посвящена доказательству следующего результата.

ТЕОРЕМА 1. Пусть иррациональное число $\alpha > 1$ имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим. Тогда при $N \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$S = \sum_{n \leq N} \mu^2([\alpha n]) = \frac{6}{\pi^2} N + O\left(AN^{\frac{5}{6}} \ln^5 N\right),$$

где $A = \max_{1 \leq m \leq N^2} \tau(m)$.

Заметим, что имеет место оценка $A = \max_{1 \leq m \leq N^2} \tau(m) \ll N^{\frac{2}{\ln \ln N}} \ll N^\varepsilon$ для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство теоремы. Равенство $m = [\alpha n]$ равносильно тому, что $\alpha n - 1 < m < \alpha n$, $\frac{m}{\alpha} < n < \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$, т. е. $\{\frac{m}{\alpha}\} > 1 - \frac{1}{\alpha}$. Пусть функция $\omega(x)$ задана на полуинтервале $(0; 1]$ следующим образом:

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 - \frac{1}{\alpha} < x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1 - \frac{1}{\alpha} \text{ или } x = 1; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

и продолжена периодически на всю числовую ось. Тогда

$$\sum_{n \leq N} \mu^2([\alpha n]) = \sum_{\substack{m \leq \alpha N \\ \{\frac{m}{\alpha}\} > 1 - \frac{1}{\alpha}}} \mu^2(m) = \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) \omega\left(\frac{m}{\alpha}\right).$$

Поскольку $\omega(x) = \frac{1}{\alpha} + \rho(x + \frac{1}{\alpha}) - \rho(x)$, где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, получаем

$$\sum_{k \leq N} \mu^2([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) + \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) \left(\rho\left(\frac{m+1}{\alpha}\right) - \rho\left(\frac{m}{\alpha}\right) \right).$$

Первое слагаемое в правой части дает главный член асимптотики:

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) = \frac{1}{\alpha \zeta(2)} \alpha N + O(\sqrt{N}) = \frac{1}{\zeta(2)} N + O(\sqrt{N}).$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое. Обозначим их через

$$R = \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) \left(\rho \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) - \rho \left(\frac{m}{\alpha} \right) \right)$$

и воспользуемся следующей леммой о разложении функции $\rho(x)$ в ряд Фурье (см. [3]).

ЛЕММА 1. *При всех $P \geq 2$ для функции $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ имеет место разложение*

$$\rho(x) = \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{e^{2\pi i k x}}{2\pi i k} + O(r(x)),$$

где

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + P^2 \sin^2 \pi x}} = \sum_{1 \leq |k| \leq P \ln P} c_k e^{2\pi i k x} + O\left(\frac{\ln P}{P}\right), \quad c_k \ll \frac{\ln P}{P} e^{-|k|/P}.$$

Применяя эту лемму к сумме R , получаем:

$$\begin{aligned} R &= \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) \left(\rho \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) - \rho \left(\frac{m}{\alpha} \right) \right) = \\ &= \left(\sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{e^{2\pi i k m}}{2\pi i k} \left(e^{2\pi i \frac{k}{\alpha}} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + O \left(\sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) \left(r \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) + r \left(\frac{m}{\alpha} \right) \right) \right) \right) = \\ &= \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{e^{2\pi i \frac{k}{\alpha}} - 1}{2\pi i k} \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i \frac{k m}{\alpha}} + O \left(\sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) \left(r \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) + r \left(\frac{m}{\alpha} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Считаем, что $2 \leq P \leq N$ (значение P в зависимости от N выберем позднее). Первая сумма оценивается следующим образом:

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{e^{2\pi i \frac{k}{\alpha}} - 1}{2\pi i k} \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i \frac{k m}{\alpha}} \right| \leq \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq |k| \leq P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i \frac{k m}{\alpha}} \right|.$$

Далее,

$$\sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) r \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) = \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) \left(\sum_{1 \leq |k| \leq P \ln P} c_k e^{2\pi i k \frac{m+1}{\alpha}} + O \left(\frac{\ln P}{P} \right) \right) =$$

$$= \sum_{1 \leq |k| \leq P \ln P} c_k e^{2\pi i k \frac{1}{\alpha}} \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} + O\left(\frac{\alpha N}{P} \ln^2 N\right).$$

Поскольку $c_k \ll \frac{\ln P}{P}$, отсюда получаем оценку

$$\sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) r \left(\frac{m+1}{\alpha} \right) \ll \frac{\ln P}{P} \sum_{1 \leq |k| \leq P \ln P} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i \frac{km}{\alpha}} \right| + \frac{\alpha N}{P} \ln^2 N.$$

Таким же образом оценивается и вторая сумма в остатке. Положим $P = \sqrt{\alpha N}$. Тогда последнее слагаемое равно $O(\sqrt{\alpha N} \ln^2 N)$. Итак, требуется оценить тригонометрические суммы

$$W_1 = \sum_{1 \leq k \leq P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i \lambda k m} \right|, \quad W_2 = \frac{\ln P}{P} \sum_{1 \leq k \leq P \ln P} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i \lambda k m} \right|,$$

где $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Нам потребуются следующие две леммы об оценке тригонометрических сумм.

ЛЕММА 2. При $Y \geq 1$

$$\sum_{y \leq Y} e^{2\pi i \lambda y} \leq \min\left(Y, \frac{1}{2\|\lambda\|}\right),$$

где $\|\lambda\| = \min(\{\lambda\}, 1 - \{\lambda\})$ — расстояние от числа λ до ближайшего целого числа.

ЛЕММА 3. Пусть $\lambda = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(a, q) = 1$, $q \geq 1$, $|\theta| \leq 1$. Тогда при $X, Y \geq 1$

$$\sum_{x \leq X} \min\left(Y, \frac{1}{\|\lambda x\|}\right) \ll \frac{XY}{q} + (X + q) \ln 2q.$$

Рассмотрим сначала сумму W_1 . Воспользуемся формулой $\mu^2(m) = \sum_{d^2|m} \mu(d)$:

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{1 \leq k \leq P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \left(\sum_{d^2|m} \mu(d) \right) e^{2\pi i \lambda k m} \right| = \sum_{1 \leq k \leq P} \frac{1}{k} \left| \sum_{d \leq \sqrt{\alpha N}} \mu(d) \sum_{r \leq \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k r d^2} \right| \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq P} \frac{1}{k} \sum_{d \leq \sqrt{\alpha N}} |\mu(d)| \left| \sum_{r \leq \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k r d^2} \right| \leq \sum_{1 \leq k \leq P} \frac{1}{k} \sum_{d \leq \sqrt{\alpha N}} \left| \sum_{r \leq \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k r d^2} \right|. \end{aligned}$$

Разобьем внешние суммы по k и по d каждую на $\ll \ln N$ сумм по промежуткам вида $(K; 2K]$ и $(D; 2D]$ и соответственно, где $2K \leq P$, $2D \leq \sqrt{\alpha N}$. Тогда получим оценку

$$W_1 \ll \ln^2 N \max_{\substack{1 \leq K \leq P/2 \\ 1 \leq D \leq \sqrt{\alpha N}/2}} \sum_{K < k \leq 2K} \frac{1}{k} \sum_{D < d \leq 2D} \left| \sum_{r \leq \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k r d^2} \right| = \ln^2 N \max_{\substack{1 \leq K \leq P/2 \\ 1 \leq D \leq \sqrt{\alpha N}/2}} W(K, D).$$

Далее в зависимости от величин K и D рассмотрим два случая: $KD \leq (\alpha N)^{1/3}$ и $KD > (\alpha N)^{1/3}$.

Случай 1. Пусть выполнено неравенство $KD \leq (\alpha N)^{1/3}$. Применяя лемму 2, оценим сумму $W(K, D)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} W(K, D) &\ll \sum_{K < k \leq 2K} \frac{1}{k} \sum_{D < d \leq 2D} \min \left(\frac{\alpha N}{d^2}, \frac{1}{\|\lambda k d^2\|} \right) \leq \\ &\leq \sum_{K < k \leq 2K} \sum_{D < d \leq 2D} \min \left(\frac{\alpha N}{k d^2}, \frac{1}{\|\lambda k d^2\|} \right) \leq \\ &\leq \sum_{K < k \leq 2K} \sum_{D < d \leq 2D} \min \left(\frac{\alpha N}{K D^2}, \frac{1}{\|\lambda k d^2\|} \right) \leq \\ &\leq \sum_{K D^2 < m \leq 8 K D^2} \left(\sum_{\substack{d^2 | m \\ d \leq 2D}} 1 \right) \min \left(\frac{\alpha N}{K D^2}, \frac{1}{\|\lambda m\|} \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством $\sum_{\substack{d^2 | m \\ d \leq 2D}} 1 \leq \tau(m) \leq A = \max_{1 \leq m \leq N^2} \tau(m)$ и леммой 3:

$$W(K, D) \ll A \sum_{K D^2 < m \leq 8 K D^2} \min \left(\frac{\alpha N}{K D^2}, \frac{1}{\|\lambda m\|} \right) \ll A \ln N \left(\frac{\alpha N}{q} + K D^2 + q \right).$$

Если число α (а значит и $\lambda = \frac{1}{\alpha}$) имеет ограниченные неполные частные или является алгебраическим, то знаменатель q подходящей дроби к λ можно выбрать так, чтобы были выполнены неравенства $(\alpha N)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \ll q \leq (\alpha N)^{\frac{1}{2}}$. Учитывая также неравенства $KD \leq (\alpha N)^{1/3}$ и $D \leq \sqrt{\alpha N}$, получаем

$$W(K, D) \ll A \ln N \left((\alpha N)^{1/2+\varepsilon} + (\alpha N)^{5/6} + (\alpha N)^{1/2} \right) \ll A (\alpha N)^{5/6} \ln N.$$

Случай 2. Пусть теперь выполнено неравенство $KD > (\alpha N)^{1/3}$. Возведем сумму $W(K, D)$ в квадрат и воспользуемся неравенством Коши:

$$W^2(K, D) \leq \frac{1}{K^2} K D \sum_{K < k \leq 2K} \sum_{D < d \leq 2D} \left| \sum_{r \leq \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k r d^2} \right|^2 =$$

$$= \frac{D}{K} \sum_{K < k \leq 2K} \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{1 \leq r', r'' \leq \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k(r' - r'')d^2}.$$

Выделим во внутренней сумме слагаемые, соответствующие $r' = r''$. Получим

$$\begin{aligned} W^2(K, D) &\leq \frac{D}{K} \left(\sum_{K < k \leq 2K} \sum_{D < d \leq 2D} \frac{\alpha N}{d^2} + \sum_{K < k \leq 2K} \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{1 \leq r' \neq r'' \leq \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k(r' - r'')d^2} \right) \ll \\ &\ll \alpha N + \frac{D}{K} \sum_{K < k \leq 2K} \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{1 \leq r' \neq r'' \leq \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k(r' - r'')d^2}. \end{aligned}$$

Для оценки полученной тройной суммы изменим в ней порядок суммирования:

$$\begin{aligned} &\sum_{K < k \leq 2K} \sum_{D < d \leq 2D} \sum_{1 \leq r' \neq r'' \leq \frac{\alpha N}{d^2}} e^{2\pi i \lambda k(r' - r'')d^2} = \\ &= \sum_{1 \leq r' \neq r'' \leq \frac{\alpha N}{D^2}} \sum_{D < d \leq \min(2D, \sqrt{\frac{\alpha N}{r'}}, \sqrt{\frac{\alpha N}{r''}})} \sum_{K < k \leq 2K} e^{2\pi i \lambda k(r' - r'')d^2} \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq r' \neq r'' \leq \frac{\alpha N}{D^2}} \sum_{D < d \leq \min(2D, \sqrt{\frac{\alpha N}{r'}}, \sqrt{\frac{\alpha N}{r''}})} \min \left(K, \frac{1}{\|\lambda(r' - r'')d^2\|} \right) \leq \\ &\leq \frac{\alpha N}{D^2} \sum_{\substack{-\frac{\alpha N}{D^2} \leq s \leq \frac{\alpha N}{D^2} \\ s \neq 0}} \sum_{D < d \leq 2D} \min \left(K, \frac{1}{\|\lambda s d^2\|} \right) \ll \frac{\alpha N}{D^2} \sum_{v \leq 4\alpha N} \left(\sum_{\substack{d^2 | v \\ d \leq 2D}} 1 \right) \min \left(K, \frac{1}{\|\lambda v\|} \right). \end{aligned}$$

Снова пользуясь неравенством $\sum_{\substack{d^2 | v \\ d \leq 2D}} 1 \leq \tau(v) \leq A = \max_{1 \leq v \leq N^2} \tau(v)$ и леммой 3, получим

$$\begin{aligned} W^2(K, D) &\leq \alpha N + A \frac{D}{K} \frac{\alpha N}{D^2} \left(\frac{\alpha N K}{q} + \alpha N + q \right) \ln N \ll \\ &\ll A \ln N \left(\alpha N + \frac{(\alpha N)^2}{qD} + \frac{(\alpha N)^2}{KD} + \frac{\alpha N q}{KD} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$W(K, D) \ll \sqrt{A \ln N} \left(\sqrt{\alpha N} + \frac{\alpha N}{\sqrt{qD}} + \frac{\alpha N}{\sqrt{KD}} + \sqrt{\frac{\alpha N q}{KD}} \right).$$

Аналогично случаю 1, знаменатель q подходящей дроби к λ можно выбрать так, чтобы были выполнены неравенства $(\alpha N K)^{\frac{1}{2} - \varepsilon} \ll q \leq (\alpha N K)^{\frac{1}{2}}$. С учетом неравенства $KD > (\alpha N)^{1/3}$ в этом случае получим

$$W(K, D) \ll \sqrt{A \ln N} \left(\sqrt{\alpha N} + \frac{(\alpha N)^{3/4 + \frac{\varepsilon}{2}}}{K^{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{2}} \sqrt{D}} + \frac{\alpha N}{\sqrt{KD}} + \frac{(\alpha N)^{3/4}}{\sqrt{K} \sqrt{D}} \right) \ll A(\alpha N)^{5/6} \ln N.$$

Итак, в обоих случаях для суммы W_1 получаем оценку

$$W_1 \ll \ln^2 N \max_{\substack{1 \leq K \leq P/2 \\ 1 \leq D \leq \sqrt{\alpha N}/2}} W(K, D) \ll A(\alpha N)^{5/6} \ln^3 N.$$

Сумму W_2 оценим следующим образом:

$$W_2 = \frac{\ln P}{P} \sum_{1 \leq k \leq P \ln P} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i \lambda k m} \right| \leq \ln^2 P \sum_{1 \leq k \leq P \ln P} \frac{1}{k} \left| \sum_{m \leq \alpha N} \mu^2(m) e^{2\pi i \lambda k m} \right|.$$

Для суммы в правой части, очевидно, справедлива та же оценка, что и для суммы W_1 (отличие от W_1 лишь в том, что количество слагаемых во внешней сумме по k в ней равно $P \ln P$ вместо P). Следовательно, $W_2 \ll AN^{\frac{5}{6}} \ln^5 N$. Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Güloğlu A. M., Nevans, C. W. Sums of multiplicative functions over a Beatty sequence // Bull. Austral. Math. Soc. 2008. Vol. 78. P. 327—334.
2. Abercrombie A. G., Banks W. D., Shparlinski I. E. Arithmetic functions on Beatty sequences // Acta Arith. 2009. Vol. 136, № 1. P. 81—89.
3. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2003.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Поступило 18.09.2013