ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-528-535

Об одном применении методов исследования алгебраической независимости гипергеометрических рядов и значений g-адических функций

А. С. Самсонов

Самсонов Алексей Сергеевич — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости, формулируется и доказываются теорема для некоторых элементов прямых произведений p-адических полей. Пусть $\mathbb{Q}_p$ — пополнение $\mathbb{Q}$ по p-адической норме, поле Ω_p — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1p_2\dots p_n$ — произведение различных простых чисел, а пополнение $\mathbb{Q}$ по g-адической псевдонорме это кольцо $\mathbb{Q}_g$, иными словами $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. Рассматривается кольцо $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$, содержащее $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Также, рассматриваются гипергеометрические ряды вида

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_j \ldots (\gamma_r)_j}{(\beta_1)_j \ldots (\beta_s)_j} (zt)^{tj},$$

и их формальные производные. Получены достаточные условия, при которых значения ряда $f(\alpha)$ и формальных производных удовлетворяют глобальному соотношению алгебраической независимости, если $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k g^{r_k}$, где $a_k \in \mathbb{Z}_g$, а неотрицательные рациональные числа r_k образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность.

Ключевые слова: p-адические числа, g-адические числа, f-ряды, трансцендентность, алгебраическая независимость.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
А. С. Самсонов. Об одном применении методов исследования алгебраической независимости гипергеометрических рядов и значений g-адических функций // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 528–535.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-528-535

One application on hypergeometic series and values of g-adic functions algebraic independence investigation methods

A. S. Samsonov

Samsonov Aleksei Sergeevich — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Abstract

The article takes a look at transcendence and algebraic independence problems, introduces statements and proofs of theorems for some kinds of elements from direct product of p-adic fields and polynomial estimation theorem. Let $\mathbb{Q}_p$ be the p-adic completion of $\mathbb{Q}$, Ω_p be the completion of the algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \dots p_n$ be a composition of separate prime numbers, $\mathbb{Q}_g$ be the g-adic completion of $\mathbb{Q}$, in other words $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. The ring $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$, a subring $\mathbb{Q}_g$, transcendence and algebraic independence over $\mathbb{Q}_g$ are under consideration. Also, hypergeometric series

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_j \dots (\gamma_r)_j}{(\beta_1)_j \dots (\beta_s)_j} (zt)^{tj},$$

and their formal derivatives are under consideration. Sufficient conditions are obtained under which the values of the series $f(\alpha)$ and formal derivatives satisfy global relation of algebraic independence, if $\alpha = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j g^{r_j}$, where $a_j \in \mathbb{Z}_g$, and non-negative rationals r_j increase strictly unbounded.

Keywords: p-adic numbers, g-adic numbers, f-series, transcendence, algebraic independence.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
A. S. Samsonov, 2021, “One application on hypergeometic series and values of g-adic functions algebraic independence investigation methods”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 528–535.

Введение

Используются следующие обозначения: p — простое число, $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $|x|_p = p^{-ord_p x}$ — p-адическая норма; $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме; Ω_p, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$; $K[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца K, например $\mathbb{Q}_p[x]$, $K[x_1, \dots, x_m]$ — кольцо многочленов от m переменных над кольцом K.

Для g-адических чисел используются следующие обозначения: $g = p_1 \dots p_n$ — произведение различных простых чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g-адических чисел, $|x|_g$ — g-адическая псевдонорма; $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g-адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по g-адической псевдонорме; построено кольцо Ω_g — расширение кольца $\mathbb{Q}_g$, $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \dots \oplus \Omega_{p_n}$.

Основные понятия и определения

Определение 1. *Обозначим* $\Phi: \mathbb{Q}_g \to \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ *— прямой изоморфизм колец, а* $\Psi: \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n} \to \mathbb{Q}_g$ *— обратный.*

Замечание 1. *Описание изоморфизма* $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ *см. в [22], с. 59.*

Утверждение 1. *Множество* $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$ *— кольцо, которое содержит кольцо* $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ *в качестве подкольца.*

Содержание этого утверждения очевидно.

Замечание 2. *Пространство* $\mathbb{Q}_g$ *представляет из себя множество* $\{\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)\}$*, где* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *пробегает множество* $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$*.*

Теперь мы построим пространство Ω_g. В силу предыдущего замечания, мы можем дополнить множество $\mathbb{Q}_g$ недостающими элементами и обозначить их $\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ пробегает множество $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$. Более того, продолжение изоморфизма Ψ, которое мы построим, будет отображать элементы $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в $\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, поэтому совпадение обозначений не приведет к конфликту.

Определение 2. *Пусть* $\Omega_g = \{\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)\}$*, где* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *пробегает* $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$*. Алгебраическую структуру заимствуем из кольца* $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$*.*

Утверждение 2. *Кольцо* Ω_g *содержит* $\mathbb{Q}_g$ *в качестве подкольца. Существует продолжение изоморфизма* $\Psi: \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n} \to \Omega_g$ *и продолжение обратного изоморфизма* $\Phi: \Omega_g \to \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$*.*

Доказательство. В силу замечания 2 и определения 2, очевидно, что кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Продолжение изоморфизма Ψ определим следующим образом, пусть Ψ отображает элемент $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в $\Psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Такое отображение будет изоморфизмом в силу определения 2. Изоморфизм Φ продолжим, как обратный к Ψ.

Замечание 3. *Далее, нет смысла упоминать названия изоморфизмов, они будут опущены, поскольку обозначения не вызывают разночтений. Если* $\alpha \in \Omega_g$*, то* $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$*, где* $\beta_k \in \Omega_{p_k}$*. Аналогично, если* $\alpha \in \mathbb{Q}_g$*, то* $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$*, если* $\alpha \in \mathbb{Z}_g$*, то* $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$*. Любой многочлен* $G \in \mathbb{Q}_g[x]$ *можно представить в виде*

$$G = (P_1, P_2, \ldots, P_n), \text{ где } P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = (P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \ldots, P_n(\beta_n)), \text{ где } \alpha \in \Omega_g,\ \alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Аналогично, если $G \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m]$*, то* $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \ldots, x_m]$*.*

Определение 3. *Обозначим* $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$*.*

Определение 4. *Обозначим* $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \beta_k \neq 0\}$*.*

Хотелось бы ввести обозначение $A \backslash \widehat{0}$, которое бы исключало из множества A, являющегося прямым произведением, все такие элементы, что хотя бы одна из компонент тождественно равна нулю, иными словами, исключить нули и делители нуля. Это обозначение представим в следующем виде.

Определение 5. $\mathbb{Z}_g\backslash\widehat{0} := \mathbb{Z}_g^*$, $\mathbb{Q}_g[x]\backslash\widehat{0} := \{G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] : \forall k \in \{1, \dots, n\}$, $P_k \not\equiv 0\}$ *и так далее.*

Замечание 4. *Следующие определения раскрывают смысл глобального соотношения, которое говорит о наличии соответствующего соотношения для каждой компоненты.*

Определение 6. *Пусть* $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. *Будем называть* α *глобально трансцендентным над* $\mathbb{Q}_g$ *элементом* Ω_g, *если для любого* $k \in \{1, \dots, n\}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_k) \neq 0$.

Определение 7. *Пусть* $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \dots, \beta_{i,n})$, $i = 1, \dots, m$. *Будем называть* α_i *глобально алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_g$ *элементами* Ω_g, *если для любого* $k \in \{1, \dots, n\}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(\beta_{1,k}, \dots, \beta_{m,k}) \neq 0$.

Определение 8. *Степенной ряд* $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, *будем называть глобально трансцендентным над* $\mathbb{Q}_g$, *если для любого* $k \in \{1, \dots, n\}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(f_k) \not\equiv 0$.

Определение 9. *Степенные ряды* $f_i(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_{i,j} z^j \in \mathbb{Z}_g[[z]]$, $f_i = (f_{i,1}, \dots, f_{i,n})$, $i = 1, \dots, m$, *будем называть глобально алгебраически независимыми над* $\mathbb{Q}_g$, *если для любого* $k \in \{1, \dots, n\}$ *и любого многочлена* $G = (P_1, P_2, \dots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \dots, x_m]\backslash\widehat{0}$ *выполняется неравенство* $P_k(f_{1,k}, \dots, f_{m,k}) \not\equiv 0$.

Формулировка и доказательство теоремы

Для семейств действительных чисел $\overline{a} = (a_1, \dots, a_k)$ и $\overline{b} = (b_1, \dots, b_k)$ используем обозначение

$$\overline{a} \approx \overline{b},$$

если существует перестановка $i_1, \dots, i_k$ чисел $1, \dots, k$ такая, что $b_j - a_{i_j} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, k$. Также, используем обозначение $\overline{a} + c$ для семейства чисел $(a_1 + c, \dots, a_m + c)$.

Теорема 1. *Пусть* $t = r - s > 0$,

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\gamma_1)_j \dots (\gamma_r)_j}{(\beta_1)_j \dots (\beta_s)_j} (zt)^{tj}.$$

Пусть четное число $t = 2k$ *и пусть множество параметров* $S = (\gamma_1, \dots, \gamma_r; \beta_1, \dots, \beta_s)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\gamma_i \notin \mathbb{Z},\ \beta_j \notin \mathbb{Z},\ \gamma_i - \beta_j \notin \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, t + s,\ j = 1, \dots, s.$$

Для всех общих делителей d *чисел* t, s, *ни одно из соотношений* $\overline{\gamma} + \frac{1}{d} \approx \overline{\gamma}$ *или* $\overline{\beta} + \frac{1}{d} \approx \overline{\beta}$ *не может иметь места.*

Кроме того, не выполняются следующие условия:
1) если $s = 0$, *тогда существуют* $x_0, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{C}$ *такие, что*

$$\overline{\gamma} + x_0 \approx \left(0, -\frac{1}{2}, x_1, -x_1, \dots, x_{k-1}, -x_{k-1}\right),$$

2) если $s>0$, $s=2q$, тогда существуют $x_0,\dots,x_{k+s-1}\in\mathbb{C}$ такие, что

$$\overline{\gamma}+x_0\approx\left(0,-\frac{1}{2},x_1,-x_1,\dots,x_{k+q-1},-x_{k+q-1}\right),$$

$$\overline{\beta}+x_0\approx\left(x_{k+q},-x_{k+q},\dots,x_{k+s-1},-x_{k+s-1}\right),$$

или

$$\overline{\gamma}+x_0\approx\left(x_1,-x_1,\dots,x_{k+q},-x_{k+q}\right),$$

$$\overline{\beta}+x_0\approx\left(0,-\frac{1}{2},x_{k+q+1},-x_{k+q+1},\dots,x_{k+s-1},-x_{k+s-1}\right),$$

3) если $s>0$, $s=2q+1$, тогда существуют $x_0,\dots,x_{k+l-1}\in\mathbb{C}$ такие, что

$$\overline{\gamma}+x_0\approx\left(0,x_1,-x_1,\dots,x_{k+q-1},-x_{k+q-1}\right),$$

$$\overline{\beta}+x_0\approx\left(-\frac{1}{2},x_{k+q},-x_{k+q},\dots,x_{k+s-1},-x_{k+s-1}\right).$$

Пусть $f'(z),f''(z),\dots,f^{(r-1)}(z)$ — формальные производные вышеуказанного ряда $f(z)$.

Пусть $g=p_1\dots p_n$ — произведение $n\geqslant 1$ различных простых чисел, для любого $j=1,\dots,s$, наибольший общий делитель $(g,\beta_j)=1$,

$$\alpha_\mu=\sum_{j=1}^{\infty}a_{j,\mu}g^{r_{j,\mu}},\ \alpha_\mu\in\Omega_g,\ a_{j,\mu}\in\mathbb{Z}_g^*,\ \mu=1,\dots,m.$$

Пусть
1) для любого $\mu=1,\dots,m$ положительные рациональные числа $r_{j,\mu}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j\to+\infty$ последовательность;
2) для любого $\mu=1,\dots,m$ существует бесконечное множество номеров j таких, что число $r_{j+1,\mu}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1,r_{1,\mu},\dots,r_{j,\mu}$ и чисел $r_{j',\mu'}$ при любых j' и при $\mu'\neq\mu$;
3) не существует номеров j, j', μ таких, что разница $r_{j,\mu}-r_{j',\mu}$ является целым числом.

Тогда элементы $f^{(\lambda)}(\alpha_\mu)$, где параметры пробегают значения $\lambda=0,1,\dots,r-1$, $\mu=1,\dots,m$, представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой 7 из статьи "Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II". Поскольку коэффициенты ряда $f(z)$ представляют собой рациональные числа, знаменатели которых взаимно просты с g, значит коэффициенты рядов принадлежат $\mathbb{Z}_g$. Остается показать, что $f(z),f'(z),\dots,f^{(r-1)}(z)\in\mathbb{Z}_g[[z]]$ глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$.

Предположим противное, а именно, пусть p — простой делитель числа g, а ряды $f(z),f'(z),f''(z),\dots,f^{(r-1)}(z)$ являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$. Поскольку $f(z)$, $f'(z),\dots,f^{(r-1)}(z)\in\mathbb{Q}[[z]]$, можно воспользоваться леммой 2 из статьи "Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей, II". Если ряды $f(z),f'(z)$, $f''(z),\dots,f^{(r-1)}(z)$ являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$, то и над $\mathbb{Q}$, но согласно результатам из статьи [19], $f(z),f'(z),f''(z),\dots,f^{(r-1)}(z)$ являются алгебраически независимыми над $\mathbb{C}(z)$, противоречие.

Заключение

Статья показывает пример приложения результатов об алгебраической независимости для конкретного случая.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams W. Transcendental numbers in the p-adic domain // Amer. J. Math., 1966, V. 88, P. 279–307.
2. Amice Y. Les nombers p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.
3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2004, V. XIII, №2, P. 241–260.
4. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е изд. доп. М.: Наука, 1985.
5. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math., 2002, V. 79, P. 345–352.
6. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // ActaArithm., 2004, V. 113, №4, P. 309–326.
7. Bundschuh P., Chirskii V. G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th., 2015, V. 5, iss. 1-2, P. 14–20.
8. Чирский В. Г. Метод Зигеля-Шидловского в p-адической области. // Фундаментальная и прикладная математика. 2005, Т. 11, №6, С. 221–230.
9. Chirskii V. G. Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ // Russian Journ. of Math. Physics, 2013, V. 20, №2, P. 149–154.
10. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук, 2014, Т. 459, №6, С. 677–679.
11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. мат., 2014, Т. 78, №6, С. 193—210.
12. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Моск. ун-та, Сер.1, мат., мех., 2015, №1, С. 59–61.
13. Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышёвский сборник, 2015, Т. 16, вып. 1, С. 254–264.
14. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат., 2017, Т. 81, №2, С. 215—232.
15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko // Russian Journ. of Math. Physics, 2017, V. 24, №2, P. 153–171.
16. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических f-рядов // Доклады академии наук, 2018, Т. 483, №3, С. 257—259.
17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series // Doklady Mathematics, 2018, V. 98, №3, P. 589-–591.
18. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journ. of Math. Physics, 2019, V. 26, №3, P. 286–305.
19. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journ. of Math. Physics, 2020, V. 27, №2, P. 175–184.

20. Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции; пер. с англ. В. В. Шокурова, под ред. Ю. И. Манина. М.: Мир, 1982.

21. Mahler K. Uber transzendente p-adische Zahlen // Compos. Math. 1935, V. 2, P. 259–275.

22. Mahler K. p-adic numbers and their functions; second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

23. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

REFERENCES

1. Adams W. 1966, "Transcendental numbers in the p-adic domain", *Amer. J. Math.*, vol. 88, pp. 279–307.

2. Amice Y. 1975, Les nombers p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris.

3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. 2004, "Effective estimates for global relations on Euler-type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241–260.

4. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. 1985, Teoriya Chisel, [The theory of numbers], third edition. "Nauka", Moscow.

5. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2002, "On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I", *Arch. Math.*, vol. 79, pp. 345–352.

6. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2004, "On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II", *ActaArithm.*, vol. 113, no. 4, pp. 309–326.

7. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2015, "Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$", *Moscow Journ. of Comb. and Number Th.*, vol. 5, iss. 1–2, pp. 14–20.

8. Chirskii V. G. 2005, "Siegel—Shidlovskii method in p-adic domain", *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 6, pp. 221–230.

9. Chirskii V. G. 2013, "Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$", *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 20, no. 2, pp. 149–154.

10. Chirskii V. G. 2014, "Arithmetic properties of poliadic series with periodic coefficients", *Dokladi akademii nauk*, vol. 459, no. 6, pp. 677–679.

11. Chirskii V. G. 2014, "Arithmetic properties of hypergeometric series with irrational parameters", *Izv. RAN. Ser. mat.*, vol. 78, no. 6, pp. 193—210.

12. Chirskii V. G. 2015, "On the arithmetic properties of Euler-type series", *Vestnik Mosk. Univ. Ser.1, mat., mech.*, no. 1, pp. 59–61.

13. Chirskii V. G. 2015, "Arithmetic properties of polyadic integer numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.

14. Chirskii V. G. 2017, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Izv. RAN. Ser. mat.* vol. 81, no. 2, pp. 215–232.

15. Chirskii V. G. 2017, "Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko", *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 24, no. 2, pp. 153–171.

16. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 483, no. 3, pp. 257–259.

17. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Dokladi Mathematics*, vol. 98, no. 3, pp. 589–591.

18. Chirskii V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 286–305.

19. Chirskii V. G. 2020, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric series”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 27, no. 2, pp. 175–184.

20. Koblitz N. 1982, p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions, 2nd ed.

21. Mahler K. 1935, “Uber transzendente p-adische Zahlen”, *Compos. Math.*, vol. 2, pp. 259–275.

22. Mahler K. 1981, p-adic numbers and their functions, second edition, Cambridge University Press, Cambridge.

23. Shidlovskii A. B. 1987, Transcendentnie chisla, [Transcendental numbers], “Nauka”, Moscow.