ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-519-527

Арифметические свойства значений некоторых гипергеометрических F-рядов

А. Х. Муньос Васкес

Муньос Васкес Анхель Хорхеевич — аспирант, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

Аннотация

Обобщённые гипергеометрические ряды имеют вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} z^n \tag{1}$$

При $l < m$ и рациональных значениях параметров они сводятся к E-функциям Зигеля. При $l = m$ и рациональных параметрах это G-функции. При $l > m$ и рациональных параметрах они являются F-рядами.

Исследование арифметических свойств значений обобщённых гипергеометрических рядов – актуальная задача имеющая большую историю. Достаточно упомянуть Зигеля К. Л., Шидловского А. Б., Салихова В. Х., Beukers F., Brownawell W. D., Heckman G., Галочкина А. И., Олейникова В. А., Иванкова П. Л., Горелова В. А., Чирского В. Г., Зудилина В. В., Matala–Aho T. и др.

В работе рассмотренны F-ряды для значений которых в работе Чирского В. Г. доказана бесконечная алгебраическая независимость.

В этой работе получены оценки снизу многочленов от значений этих рядов и их производных в конкретном p-адическом поле.

Ключевые слова: F-ряды, оценки линейных форм и многочленов, p-адические числа.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:
А. Х. Муньос Васкес. Арифметические свойства значений некоторых гипергеометрических F-рядов // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 519–527.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 511.36 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-519-527

Arithmetic properties of the values some hypergeometric F-series

A. Kh. Munos Vaskes

Munos Vaskes Ankhel Khorkheevich — graduate student, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

Abstract

Generalized hypergeometric series are of the form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} z^n \qquad (2)$$

If $l < m$ and if the parameters are rational, they are closely related to Siegel's E-functions. If $l = m$ and if the parameters are rational, they are G-functions. For $l > m$ and if the parameters are rational, they are F-series.

The arithmetic properties values of generalized hypergeometric series is an actual problem with a long history. We shall only mention Siegel C. L., Shidlovskii A. B., Salikhov V. Kh., Beukers F., Brownawell W. D., Heckman G., Galochkin A. I., Oleinikov V. A., Ivankov P. L., Gorelov V. A., Chirskii V. G., Zudilin W., Matala–Aho T. etc

We consider the so–called F-series. Chirskii V.G. proved the infinity algebraic independence of the corresponding values.

Here we obtain lower estimates of polynomials and linear forms in the values of these series and their derivatives in a concrete p-adic field.

Keywords: F-series, estimates linear forms and polynomials, p-adic numbers.

Bibliography: 24 titles.

For citation:
A. Kh. Munos Vaskes, 2021, "Arithmetic properties of the values some hypergeometric F-series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 519–527.

Введение

Для произвольного $a \in \mathbb{C}$ символ Похгаммера определяется равенством

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), & \text{при } n = 1, 2, \dots. \end{cases} \qquad (3)$$

Если $a_i, b_j \in \mathbb{C}, b_j \neq 0, -1, -2, \dots, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m$ то рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n} z^n \qquad (4)$$

Функции такого вида называются *обобщёнными гипергеометрическими функциями.* Эти функции широко используются в математике и её приложениях. Частными случаями обобщенных гипергеометрических функций являются

1. целые функции, $e^x, \sin x, \cos x$ и т.д. в случае $l < m$
2. функции имеющие конечный радиус сходимости, например $\ln(1+x), (1+x)^\alpha$ и т.д. в случае $l = m$
3. ряды, имеющие в комплексной области нулевой радиус сходимости, однако сходящиеся в p – адических полях, например $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$, при $l > m$.

Арифметические свойства гипергеометрических целых функций посвящено большое количество работ. Они относятся к рядам вида (4), здесь мы упомянем лишь те, которые можно отнести к основным: Шидловский А. Б. [18], Салихов В. Х. [6]–[9], Олейников В. А. [5] и др.

Арифметические свойства гипергеометрических G – функций исследованы в работах Bombieri E. [21], Галочкина А. И. [1],[2] и др.

История F – рядов рассмотрена в работах Чирского В. Г. [10], [22]. Общая теория F – рядов дана в работах Чирского В. Г. [10]–[17], [22]–[23], André Y. [19], и в коллективных у Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. [20], Matala–Aho T., Zudilin W. [24] и др. В них доказываются, в основном результаты, об отсутствии глобальных соотношений.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени κ над $\mathbb{Q}$. Пусть V – множество всех нормирований на поле $\mathbb{K}$. Для любого $v \in V$ соответствующие пополнения полей $\mathbb{K}$ и $\mathbb{Q}$ обозначаем $\mathbb{K}_v$ и $\mathbb{Q}_v$. Пусть $P(y_1, \ldots, y_m)$ – многочлен с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, степенные ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ имеют коэффициенты из $\mathbb{K}$, точка $\xi \in \mathbb{K}$.

Определение 1. *Соотношение*

$$P(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)) = 0$$

называется глобальным, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)$.

В работе автора [3] рассмотрены F – ряды в конкретном p – адическом поле. В настоящей работе описана теорема 2 этой статьи, примененная к обобщенным гипергеометрическим F – рядам которые были рассмотренны в статье [10]. Мы сохраняем обозначения использованные в этих работах.

Напомним формулировку этой теоремы.

Теорема 1 ([3], теорема 2). *Пусть F – ряды $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ принадлежат классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ и удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений*

$$y_i' = Q_{i,0} + \sum_{j=1}^{\infty} Q_{i,j} y_j, i = 1, \ldots, m,$$

где $Q_{i,j} \in \mathbb{Q}(z), i = 1, \ldots, m, j = 0, 1, \ldots, m$. Пусть $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ и $T(z)Q_{i,j} \in \mathbb{Z}(z)$, $i = 1, \ldots, m, j = 0, 1, \ldots, m$. Пусть эти ряды алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Пусть

$$P(y_1, \ldots, y_m)$$

произвольный многочлен степени K, коэффициенты которого являются целыми числами из поля $\mathbb{Q}$, причём среди них есть отличные от нуля. Пусть, кроме того, наибольшая из абсолютных величин этих коэффициентов, а также сопряжённых с ними чисел, равна $H, H \geqslant H_0$.

Пусть p – простое число, $(p, q) = 1$, выполняются условия

$$p\left(\frac{\ln p - 1}{\ln p}\right) > 2(c_3 + 1)K,$$

а также $\xi = p^{\gamma(H)}, T(\xi) \neq 0$ и пусть $\gamma(H) \geqslant \binom{m+K}{m} \frac{\ln \ln H}{\ln p}$.

Тогда в поле Q_p выполняется

$$P(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi)) \neq 0.$$

Далее, пусть $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_s), \bar{b} = (b_1, \ldots, b_s), a_i, b_j \in \mathbb{C}$. Используется обозначение $\bar{a} \approx \bar{b}$ в случае, когда существует перестановка $i_1, \ldots, i_s$ чисел $1, \ldots, s$ такая, что $a_j - b_{i_j} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, s$. Для $c \in \mathbb{C}$ обозначим $(\bar{a} + c) = (a_1 + c, \ldots, a_s + c)$.

Основной результат

Теорема 2. *Пусть ряд*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\eta_1)_n\dots(\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n\dots(\lambda_s)_n}(zt)^{tn}, \tag{5}$$

в котором множество

$$S=\{\eta_1,\dots,\eta_r;\lambda_1,\dots,\lambda_s\},\ r>s \tag{6}$$

состоит из нецелых рациональных параметров, а

$$t=r-s.$$

чётно, $t=2k$, и для множества параметров S выполнены условия:

$$\eta_i-\lambda_j\notin\mathbb{Z},\quad i=1,\dots,t+s,\quad j=1,\dots,s.$$

Пусть для всех d – общих делителей чисел t,s либо не выолняется соотношение $\overline{\eta}+\frac{1}{d}\approx\overline{\eta}$, либо не выполняется соотношение $\overline{\lambda}+\frac{1}{d}\approx\overline{\lambda}$.

Пусть не выполняется ни одно из следующих условий:

1. *если $s=0$, то существуют $X_0,X_1,\dots,X_{k-1}\in\mathbb{C}$ такие, что*
$$(\bar\eta+X_0)\approx(0;-\frac{1}{2};X_1;-X_1;\dots;X_{k-1};-X_{k-1});$$
2. *если $s>0$ – чётно, $s=2u$, то существуют $X_0,X_1,\dots,X_{k+s-1}\in\mathbb{C}$ такие, что либо*
$(\bar\eta+X_0)\approx(0;-\frac{1}{2};X_1;-X_1;\dots;X_{k+u-1};-X_{k+u-1});$
$(\bar\lambda+X_0)\approx(X_{k+u};-X_{k+u};\dots;X_{k+s-1};-X_{k+s-1});$
либо
$(\bar\eta+X_0)\approx(X_1;-X_1;\dots;X_{k+u};-X_{k+u});$
$(\bar\lambda+X_0)\approx(0;-\frac{1}{2};X_{k+u+1};-X_{k+u+1};\dots;X_{k+s-1};-X_{k+s-1});$
3. *если $s>0$ – нечётно, $s=2u+1$, то существуют $X_0,X_1,\dots,X_{k+l-1}\in\mathbb{C}$ такие, что*
$(\bar\eta+X_0)\approx(0;X_1;-X_1;\dots;X_{k+u};-X_{k+u});$
$(\bar\lambda+X_0)\approx(-\frac{1}{2};X_{k+u+1};-X_{k+u+1};\dots;X_{k+s-1};-X_{k+s-1}).$

Пусть

$$P(y_1,\dots,y_m)$$

произвольный многочлен степени K, коэффициенты которого являются целыми числами из поля $\mathbb{Q}$, причём среди них есть отличные от нуля. Пусть, кроме того, наибольшая из абсолютных величин этих коэффициентов, а также сопряжённых с ними чисел, равна $H,H\geqslant H_0$.

Пусть q – наименьшее общее кратное знаменателей рациональных коэффициентов η_i, $i=1,\dots,r$ в степени $1+[\ln K]$ и для простого числа p, $(p,q)=1$, выполняются условия

$$p\left(\frac{\ln p-1}{\ln p}\right)>2(c_3+1)K,$$

а также $\xi=p^{\gamma(H)}$ и пусть $\gamma(H)\geqslant\binom{m+K}{m}\frac{\ln\ln H}{\ln p}$.

Тогда в поле Q_p выполняется

$$P(f(S,\xi),f'(S,\xi),\dots,f^{(r-1)}(S,\xi))\neq 0.$$

Определение 2. *Степенной ряд называется F – рядом, если он входит в некоторый класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, где $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\kappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.*

Класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ определяется следующим образом. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n.$$

Пусть:

1. $a_n \in \mathbb{K}, n = 0, 1, 2, \dots;$
2. $|\overline{a_n}| = O(e^{c_1 n}), n \to \infty$ (где для алгебраического числа α символ $|\overline{\alpha_n}|$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел);
3. существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, n = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, n.$

При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p, не большие $c_2 n$, причём

$$\operatorname{ord}_p d_{0,n} \leqslant c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении перечисленных условий будем говорить, что $f(z)$ *входит в класс* $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$.

Также отметим, что частный случай F – ряда, а именно $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! z^n$, который рассматривал ещё в своих работах Л. Эйлер представляет собой ассимптотическое разложение для интеграла $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{w}{z}}}{1+w} dw$.

Везде далее считаем $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}$.

Для доказательства основной теоремы необходимо проверить выполнение условий теоремы 1 для рядов вида (5) Для этого сформулируем ряд лемм и введем несколько определений. Проверим являются ли ряды вида (5) F – рядами.

Лемма 1 (см.[22]). *Если параметры* (6) *являются рациональными числами, то соответствующий ряд* (5) *будет F - рядом*

Лемма 2 (см.[22]). *Для любого множества параметров* (6) *ряд* (5) *представляет собой формальное решение линейного дифференциального уравнения*

$$y' = Q_0 + \sum_{j=1}^{\infty} Q_j y_j,$$

где $Q_j \in \mathbb{Q}(z), j = 0, 1, \dots, m.$

Доказательство. Для доказательства, сначала, докажем что они являются решениями для

$$\left(\prod_{j=1}^{s} \left(z\frac{d}{dz} + t(\lambda_j - 1) \right) - z^t \prod_{i=1}^{r} \left(z\frac{d}{dz} + t\eta_i \right) \right) y = \prod_{j=1}^{s} t(\lambda_j - 1). \qquad (7)$$

Рассмотрим уменьшаемое после раскрытия скобок

$$\prod_{j=1}^{s}\left(z\frac{d}{dz}+t(\lambda_j-1)\right)\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\eta_1)_n\dots(\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n\dots(\lambda_s)_n}(zt)^{tn}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\eta_1)_n\dots(\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n\dots(\lambda_s)_n}\prod_{j=1}^{s}\left(z\frac{d}{dz}+t(\lambda_j-1)\right)(zt)^{tn}=$$

$$=t^s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\eta_1)_n\dots(\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n\dots(\lambda_s)_n}(zt)^{tn}\prod_{j=1}^{s}(n+\lambda_j-1)=$$

$$=\prod_{j=1}^{s}t(\lambda_j-1)+t^s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\eta_1)_n\dots(\eta_r)_n}{(\lambda_1)_{n-1}\dots(\lambda_s)_{n-1}}(zt)^{tn}, \quad (8)$$

учитывая (3). Для вычитаемого получим

$$z^t\prod_{i=1}^{r}\left(z\frac{d}{dz}+t\eta_i\right)\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\eta_1)_n\dots(\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n\dots(\lambda_s)_n}(zt)^{tn}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\eta_1)_n\dots(\eta_r)_n}{(\lambda_1)_n\dots(\lambda_s)_n}z^t\prod_{i=1}^{r}\left(z\frac{d}{dz}+t\eta_i\right)(zt)^{tn}=$$

$$=t^r\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\eta_1)_{n+1}\dots(\eta_r)_{n+1}}{(\lambda_1)_n\dots(\lambda_s)_n}(zt)^{t(n+1)}t^{-t}=$$

$$=t^s\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\eta_1)_n\dots(\eta_r)_n}{(\lambda_1)_{n-1}\dots(\lambda_s)_{n-1}}(zt)^{tn} \quad (9)$$

Разность последних частей цепочек (8) и (9) показывают верное равенство, а значит ряд (5) действительно удовлетворяет уравнению (7), которое сводиться к данному в формулировке леммы. □

Отметим что особой точкой уравнения (7) является точка $z=0$ и то, что упоминающийся в формулировке теоремы 1 многочлен $T(z)$ отличен от нуля при $z\neq 0$.

Лемма 3 (теорема из статьи [22]). *Пусть множество параметров $S=\{\eta_1,\dots,\eta_r;\lambda_1,\dots,\lambda_s\}$, $r>s$ состоит из нецелых рациональных чисел, $t=r-s=2k$. Пусть $\eta_i-\lambda_j\notin\mathbb{Z}$, $i=1,\dots,r$; $j=1,\dots s$. Тогда ряды $y(z),y'(z),\dots,y^{(r-1)}(z)$ алгебраически независимы (где $y(z)$ любое решение уравнения (7)).*

Доказательство этой леммы для F – рядов получен в статье [22] с использованием важной теоремы из работы [8] Салихова В. Х, при замене переменной $z=\frac{1}{u}$, и применением результатов Нестеренко Ю. В. [4].

Таким образом выполняются все условия теоремы 1, а следовательно, применяя её к гипергеометрическому F – ряду (5) и множеству его производных различных степеней, получаем утверждение основной теоремы.

Заключение

Ближайшими перспективами дальнейшей работы можно считать последующее уточнение оценок. В дальнейшем, результаты данной работы будут использованы для изучения гипергеометрических рядов с рациональными параметрами, входящими в класс F – рядов. Одной из трудных проблем, подходы к решению которой пока неизвестны, можно назвать устранение зависимости p – адической величины рассматриваемой точки от высоты формы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галочкин А. И. О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм // Мат.сб.1984.т.124(166),№3(7). с.416–430.

2. Галочкин А. И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса // Мат. сб., Т. 95(137), №3(11), 1974, С. 396–417.

3. Муньос Васкес А. Х. Оценки снизу многочленов и линейных форм от значений $F-$ рядов // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3.

4. Нестеренко Ю. В. Об алгебраической независимости значений E – функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям // Матем. заметки, 5:5 (1969), 587–598; Math. Notes, 5:5 (1969), 352–358.

5. Олейников В. А. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых целых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – Т. 32, №1. – С. 63–92.

6. Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических E – функций // Мат.сб. 1990. т.181, №2. с.189–211.

7. Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая незасисмость значений E – функций // Acta Arith. –1990. т. 53. с.453–471.

8. Салихов В. Х. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E – функций // ДАН СССР. 1989. т.307, №2. с.284–287.

9. Салихов В. Х. Формальные решения линейных дифференциальных уравнений и их применение в теории трансцендентных чисел // Тр. Моск. мат. о-ва. 1988. т.51. с.223–256.

10. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F – рядов // Доклады Академии наук. Наука (М.). 2018. т. 483, №3, с.257–259.

11. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. Наука (М). 2014. т. 439, №6. с. 677–679.

12. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. 2017. т. 81, выпуск 2. с. 215–232.

13. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. т. 16, №1. с. 254–264.

14. Чирский В. Г. Линейная независимость p – адических значений некоторых q – базисных гипергеометрических рядов // Фунд. и прикл. матем. 1999. т. 5, №2. с. 619–625.

15. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. 1990. т. 48, №2. с.123–127.

16. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая. 2014. т. 78, №6. с. 193–210.

17. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета. Серия 1: Матемаика. Механика. Изд–во Моск. университета (М). 2015. №1. с. 59–61.

18. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987.

19. André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. // Inst. Math., Jussieu.

20. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII, №2. pp. 241–260.

21. Bombieri E. On G-functions. // Recent Progress in Analytic Number Theory. V.2. London: Academic Press, 1981. – P. 1–68.

22. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric F – Series // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175–184.

23. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic numbers // Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2019. Vol. 26, №3, pp. 286–305.

24. Matala–Aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations. // J. Number Theory. 2018. 186, pp.202–210.

REFERENCES

1. André, Y. "Séries Gevrey de type arithmétique", Inst. Math., Jussieu.

2. Bertrand, D., Chirskii, V. G. & Yebbou, Y. 2004. "Effective estimates for global relations on Euler – type series", *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol. XIII, №2. pp. 241–260.

3. Bombieri, E. 1981, "On G-functions", *Recent Progress in Analytic Number Theory.* Vol.2. London: Academic Press, pp. 1–68.

4. Chirskii, V. G. 2020, "Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol 27, №2, pp. 175–184.

5. Chirskii, V. G. 2019, "Product formula, global relations and polyadic integers", *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol. 26, №3, pp. 286–305.

6. Chirskii, V. G. 2018, "Arithmetic properties of generalized hypergeometric F-series", *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). Vol. 98, №3. pp.589–591.

7. Chirskii, V. G. 2017, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), Vol. 81,№2. pp. 444–461.

8. Chirskii, V. G. 2015, "Arithmetic properties of Euler series", *Moscow University Mathematics Bulletin*, Allerton Press Inc.(United States), Vol. 70, №1, pp.41–43.

9. Chirskii, V. G. 2015, "Arithmetic properties of polyadic integers", *Chebyshevskii Sb.*, 16:1, pp.254–264.

10. Chirskii, V. G. 2014, "Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients", *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol. 90, №3, pp. 766–768.

11. Chirskii, V. G. 2014, "On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters", *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States). Vol. 78, №6. pp. 1244–1260.

12. Chirskii, V. G. 1999, "Linear independence of the p – adic values of certain q – basic hypergeometric series", *Fundam. Prikl. Mat.*, 5:2 , pp.619–625.

13. Chirskii, V. G. 1990, "Global relations", *Mat. Zametki*, 48:2, 123–127; *Math. Notes*, 48:2 (1990), pp.795–798.

14. Galochkin,A. I. 1984, "On estimates, unimprovable with respect to height, of some linear forms", *Mat. Sb. (N.S.)*, 124(166):3(7), 416–430; Math. USSR-Sb., 52:2 (1985), 407–421

15. Galochkin, A. I. 1974, "Estimates from below of polynomials in the values of analytic functions of a certain class", *Mat. Sb. (N.S.)*, 95(137):3(11), 396–417; Math. USSR-Sb., 24:3 (1974), 385–407

16. Matala–Aho T. & Zudilin W. 2018, "Euler factorial series and global relations", *J. Number Theory*, 186, pp.202–210.

17. Munos Vaskes, A. Kh. 2020, "Lower estimates of polynomials and linear forms in the values of F – series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3

18. Nesterenko Yu. V. 1969, "On the Algebraic Independence of the Values of E-Functions Satisfying Nonhomogeneous Linear Differential Equations" *Mat. Zametki* 5 (5), 587–599 [Math. Notes 5 (5), 352–358 (1969)].

19. Oleinikov, V. A. 1968, "On the transcendence and algebraic independence of the values of certain entire functions", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 32:1, 63–92; Math. USSR-Izv., 2:1 (1968), 61–87

20. Salikhov, V. Kh. 1990, "A criterion for the algebraic independence of values of a class of hypergeometric E – functions", *Mat. Sb.*, 181:2, 189–211; Math. USSR-Sb., 69:1 (1991), 203–226

21. Salikhov V. Kh. 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of E – functions", *Acta Arith.*, Vol. 53. p. 453–471.

22. Salikhov, V. Kh. 1989, "Algebraic independence of values of hypergeometric E – functions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 307:2, 284–287; Dokl. Math., 40:1 (1990), 71–74

23. Salikhov, V. Kh. 1988, "Formal solutions of linear differential equations and their application in the theory of transcendental numbers", *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 51, MSU, M., 223–256

24. Shidlovskii, A. B. 1989, "Transcendental numbers" [Transtsendentnye chisla] / Andrei Borisovich Shidlovskii; translated from the Russian by Neal Koblitz.