ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения[1]

А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский

Козко Артем Иванович — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Лужина Любовь Михайловна — кандидат физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Попов Антон Юрьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Чирский Владимир Григорьевич — доктор физико-математических наук, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Российская академия народного хозяйства и государственной службы (г. Москва).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Аннотация

В статье исследуется зависимость функций капитала (ресурса) и потребления в экономической модели Рамсея — Касса — Купманса в случае, когда сбережение является тождественной постоянной. В сделанных предположениях ситема дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию рассматриваемой экономической модели, решена в квадратурах. На основании полученного решения найдены оценки сверху функции потребления.

Ключевые слова: математическая модель, задача Рамсея — Касса — Купманса, конкурентные домохозяйства, функция капитала, потребления.

Библиография: 19 названий.

Для цитирования:
А. И. Козко, Л. М. Лужина, А. Ю. Попов, В. Г. Чирский. Ограничения на значения функции потребления в модели экономического роста Рамсея — Касса — Купманса в случае стационарности функции сбережения // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 501–509.

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-01-00332-а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 22. No. 2.

UDC 518.865 DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-501-509

Restrictions on the values of the consumption function in the Ramsey — Kass — Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function

A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii

Kozko Artem Ivanovich — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Luzhina Lyubov Mihailovna — candidate of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: lluzhina@gmail.com
Popov Anton Yurievich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: prozerpi@yahoo.co.uk
Chirskii Vladimir Grirorevich — doctor of physical and mathematical sciences, Lomonosov Moscow State University; Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow).
e-mail: vgchirskii@yandex.ru

Abstract

We study the dependence of the functions of capital (resource) and consumption in the Ramsey–Kass–Koopmans economic model in the case when saving is an identical constant. The system of differential equations describing the evolution of the economic model under consideration is solved in quadratures under the assumptions made. Upper estimates of the consumption function are found based on the obtained solution.

Keywords: mathematical model, Ramsey–Kass–Koopmans problem, competitive households, function of capital, consumption.

Bibliography: 19 titles.

For citation:
A. I. Kozko, L. M. Luzhina, A. Yu. Popov, V. G. Chirskii, 2021, “Restrictions on the values of the consumption function in the Ramsey–Kass–Koopmans economic growth model in the case of a stationary saving function”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 501–509.

Введение

В модели Рамсея – Касса – Купманса (см. [5] –[12]), применяемой в теории экономического роста, определяющую роль играет система двух дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции $K(t)$ — капитал в момент времени t и $C(t)$ — потребление в момент времени t:

$$\begin{cases} \dot{K}(t) = aK^{\alpha}(t) - C(t) - x_1 K(t), \\ \dot{C}(t) = \theta^{-1}\alpha a K^{\alpha-1}(t)C(t) - x_2 C(t). \end{cases} \tag{1}$$

В систему входит набор констант $(a, \alpha, \theta, x_1, x_2)$, характеризующих рассматриваемую экономическую структуру.

Первая группа констант a, α, θ определяет производственную функцию Кобба – Дугласа f и функцию полезности U_θ. В качестве функции $f(K)$, выражающей зависимость производства продукции от капитала K, берут степенную функцию Кобба – Дугласа [5] –[12]

$$f(K) = aK^{\alpha}. \tag{2}$$

В последних работах Гомеса [18], [19] экономическая модель Рамсея – Касса – Купманса разбиралась также и для CES производственной функции, т.е. для функции вида $f(K) = B(\alpha K^{\psi} + (1-\alpha))^{1/\psi}$, где $B > 0$, $\alpha \in (0;1)$, $\psi < 1$.

В статье нами задача решается на бесконечном промежутке времени $t \in [0;\infty)$. Отметим также некоторые интересные обобщения данной модели, в которых рассматриваются задачи на конечном промежутке времени (модель с "известным концом света") с учётом режима производства технологической информации см. [17]. В работах авторов [1] –[4] также изучалась модель экономического роста на конечном промежутке времени.

Во всех востребованных на практике моделях показатель степени α в производственной функции Кобба –Дугласа лежит в пределах $0.7 \leqslant \alpha \leqslant 0.97$. Модели со значениями показателя α меньше $2/3$ считаются заведомо неэффективными и не рассматриваются см. [15]. В качестве функции полезности U_θ обычно берут

$$U_\theta = \frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \quad \theta > 0, \quad \theta \neq 1, \ U_1(C) = \ln C. \tag{3}$$

Значение параметра θ обычно лежит в отрезке $0.4 \leqslant \theta \leqslant 4$.

Вторая группа констант, линейными комбинациями которых являются $x_1 = x + n + \delta$ и $x_2 = \frac{\delta+\rho}{\theta} + x$, связана с такими характеристиками изучаемой экономической системы (n, x, δ, θ), как темпы прироста населения, развитие уровня технологии, выбывания капитала, а также ставкой временного предпочтения. Подробно с ними можно ознакомиться в [7] –[12]. В дальнейших рассмотрениях существенно, что x_1, x_2 — небольшие положительные числа, как правило, лежащие в пределах от 0.01 до 0.1.

В этой работе мы изучаем решения системы уравнений (1) в том важном частном случае, когда величины x_1 и x_2 связаны между собой соотношением

$$x_2 = \alpha x_1. \tag{4}$$

Равенство (4) рассматривалось в ряде публикаций, поскольку при его выполнении функция сбережения (см. о ней в [8]) является тождественной постоянной. Отметим, что нам не встретились в работах по этой тематике какие-либо решения системы (3) в квадратурах даже при выполнении связи (4) между входящими в систему экономическими параметрами. Обычно находят приближённое решение данной системы уравнений (без теоретической оценки погрешности), либо решают её численно. Также из этой системы приближённо выражают зависимость $C(K)$, показывающую, каким образом функция потребления зависит от величины капитала.

В случае выполнения равенства (4) мы получили решение системы дифференциальных уравнений (1) в квадратурах, хотя решение содержит интегралы от элементарных функций, в общем случае через элементарные функции не выражаемые. В то же время, в процессе решения системы (1) мы получили, введя функции

$$v(t) = K(t)e^{x_1 t}, \quad w(t) = C(t)e^{x_2 t}, \tag{5}$$

явную зависимость $v(w)$ через элементарные функции. Анализ этой зависимости позволил обнаружить ограничение на значения функции потребления $C(t)$, выражаемое через начальные условия
$$K(0) = K_0, \quad C(0) = C_0. \tag{6}$$

Как правило, в статьях, где рассматривались экономические модели, описываемые системой дифференциальных уравнений (1) с начальными условиями (6), рассматривались только возрастающие решения системы (1) (как $K(t)$, так и $C(t)$). Необходимым (но недостаточным) условием возрастания $K(t)$ является следующее неравенство между начальными условиями:
$$C_0 \leqslant f(K_0). \tag{7}$$

Мы несколько расширили допустимый класс решений системы (1), не требуя возрастания $K(t)$; мы лишь требуем, чтобы возрастающей являлась функция $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$. Очевидно, что неубывание $K(t)$ влечёт за собой возрастание $v(t)$, но не наоборот.

В указанных предположениях доказана теорема 1, которая является основным результатом нашей работы. Говоря описательно, содержание этой теоремы состоит в том, что если начальное значение C_0 функции потребления $C(t)$ "ненамного"меньше значения производственной функции f от начального капитала K_0, то $C(t)$ не может "значительно"подняться над своим начальным уровнем без того, чтобы нарушилось возрастание $v(t)$ и, как следствие, начала бы снижаться величина капитала $K(t)$.

Основные результаты

Перед формулировкой теоремы введём сравнительную характеристику начальных условий (6)
$$\triangle = \frac{f(K_0)}{C_0} - 1, \tag{8}$$
неотрицательную согласно ограничениям (7). Введённая характеристика связана с начальным значением неотрицательной функции $s(t) = 1 - \frac{C(t)}{f(K(t))}$, известной как норма валового сбережения. Нетрудно убедиться в справедливости равенства $\triangle = \frac{s(0)}{1-s(0)}$. Откуда вытекает равносильность $\triangle \geqslant 0 \Longleftrightarrow s(0) \geqslant 0$.

Теорема 1. *Пусть $K(t)$, $C(t)$ — решения системы (1) на произвольном отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, удовлетворяющие начальным условиям (6), подчинённым ограничению (7). Тогда при условии (4) связи между параметрами справедливо следующее утверждение. Для того, чтобы функция $v(t) = K(t)e^{x_1 t}$ была неубывающей на всем отрезке $[0;T]$, функция $w(t) = C(t)e^{x_2 t}$ во всех точках отрезка $[0;T]$ необходимо должна удовлетворять оценке сверху*
$$w(t) \leqslant C_0 \left(1 + \triangle(1-\theta)\right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если } \theta \in (0;1), \tag{9}$$
$$w(t) \leqslant C_0 e^{\triangle}, \quad \text{если } \theta = 1. \tag{10}$$

Если $\theta > 1$, то оценка сверху
$$w(t) \leqslant C_0 \left(1 - \triangle(\theta-1)\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{11}$$
выполняется при условии $0 < \triangle < (\theta-1)^{-1}$.

Функция $w(t)$ является возрастающей, и поэтому выполнение неравенств (9)–(11) в точке T следует, что они выполняются во всех точках интервала $(0;T)$, причём неравенства становятся строгими.

Замечание 1. *Если функция $w(t)$ достигнет в некоторой точке $t = T_0$ значения, стоящего в правой части неравенств теоремы 1 (какого именно неравенства — зависит от значения θ), то при всех $t > T_0$ функция $w(t)$ в силу своего возрастания превзойдёт эту границу. А тогда функция $v(t)$ (и тем более $K(t)$) будет иметь при любом $t > T_0$ отрицательную производную.*

Замечание 2. *В случае $\theta > 1$, когда $\triangle \geqslant (\theta - 1)^{-1}$ наш метод не дает ограничений на значения $w(t)$ (или хотя бы $C(t)$), однако возможность наличия подобных ограничений не исключена.*

Из теоремы 1 и тождества $C(t) = w(t)e^{-x_2 t}$ получаем ограничение сверху для значений функции потребления.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 для функции потребления $C(t)$ при всех значениях $t > 0$ верны следующие оценки сверху;*

$$
\begin{aligned}
&C(t) \leqslant C_0 e^{-x_2 t} \left(1 + \triangle(1-\theta)\right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если} \ \ \theta \in (0;1),\\
&C(t) \leqslant C_0 e^{(\triangle - x_2 t)}, \quad \text{если} \ \ \theta = 1,\\
&C(t) \leqslant C_0 e^{-x_2 t} \left(1 - \triangle(\theta-1)\right)^{\frac{1}{1-\theta}}, \quad \text{если} \ \ \theta > 1, \ \triangle < (\theta-1)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Преобразуя систему дифференциальных уравнений (1) относительно функций $K(t)$ и $C(t)$ в систему дифференциальных уравнений относительно функций $v(t)$ и $w(t)$, определённых формулами (5). Полученная в результате этих преобразований система дифференциальных уравнений относительно функции v и w будет выглядеть проще, нежели система (1), но, в отличие от неё, окажется не автономной: в правых частях уравнений будут присутствовать множители, явно зависящие переменной t. Однако, в силу равенства (4) эти множители являются одинаковыми. Данное обстоятельство позволит вывести для зависимости $v(w)$ дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши для которого явно решается известными методами.

Согласно (5) имеем

$$
\begin{aligned}
\dot{K}(t) &= \frac{d}{dt}\left(v(t)e^{-x_1 t}\right) = \dot{v}(t)e^{-x_1 t} - x_1 v(t)e^{-x_1 t} = \dot{v}(t)e^{-x_1 t} - x_1 K(t),\\
\dot{C}(t) &= \frac{d}{dt}\left(w(t)e^{-x_2 t}\right) = \dot{w}(t)e^{-x_2 t} - x_2 w(t)e^{-x_2 t} = \dot{w}(t)e^{-x_2 t} - x_2 C(t).
\end{aligned}
$$

Отсюда находим

$$
\dot{K}(t) + x_1 K(t) = \dot{v}(t)e^{-x_1 t}, \qquad \dot{C}(t) + x_2 C(t) = \dot{w}(t)e^{-x_2 t}. \tag{12}
$$

Из (12) заключаем, что после перехода от $K(t)$ и $C(t)$ к функциям $v(t)$ и $w(t)$ по формулам (5) система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\dot{v}e^{-x_1 t} = av^{\alpha}(t)e^{-\alpha x_1 t} - w(t)e^{-x_2 t};\\
&\dot{w}e^{-x_2 t} = \theta^{-1}\alpha a v^{\alpha-1}(t)w(t)e^{((1-\alpha)x_1 - x_2)t}.
\end{aligned}
\right. \tag{13}
$$

После умножения первого уравнения системы (13) на $e^{x_1 t}$, а второго — на $e^{x_2 t}$ приходим к равносильной (4) системе дифференциальных уравнений

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\dot{v} = av^{\alpha}e^{x_1(1-\alpha)t} - we^{(x_1 - x_2)t};\\
&\dot{w} = \theta^{-1}\alpha a v^{\alpha-1} w e^{x_1(1-\alpha)t}.
\end{aligned}
\right. \tag{14}
$$

Вследствие условия (4) величины $x_1(1-\alpha)$ и $x_1 - x_2$ совпадают. Обозначим

$$x_1 - x_2 = x_1(1-\alpha) = \varkappa > 0.$$

Ввиду сказанного, система уравнений (14), равносильная исходной системе (1) при ограничении (4), приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{v} = (av^{\alpha} - w)e^{\varkappa t}, \\ \dot{w} = \theta^{-1}\alpha a w v^{\alpha-1} e^{\varkappa t}. \end{cases} \tag{15}$$

Из системы (15) мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для зависимости $v(w)$. Приведём без доказательства следующий результат, который позволяет находить явное выражение функции v через w.

Теорема 2. *Если экономические параметры, определяющие систему дифференциальных уравнений* (1) *с начальными условиями* (6)*, связаны соотношением* (4)*, то между функциями $v = v(t)$ и $w = w(t)$, выражающимися через $K(t)$ и $C(t)$ по формулам* (5)*, имеется следующая зависимость:*

$$v = \left(K_0^{\alpha} \left(\frac{w}{C_0} \right)^{\theta} + \frac{\theta w^{\theta}}{a} \left(U_{\theta}(C_0) - U_{\theta}(w) \right) \right)^{1/\alpha}.$$

Заключение

Проделанное исследование имеет целью дать количественное выражение интуитивно очевидному принципу, состоящему в том, что успешный экономический рост невозможен, если уровень производства "значительно" не опережает уровень потребления. Но сколь значительным должно быть это опережение в начальный момент времени? Мы получили первые теоретически обоснованные результаты в данном направлении для экономических систем со стационарной функцией сбережения. Для того, чтобы дать оценку сверху максимально возможному уровню потребления в рассматриваемых нами экономических моделях, мы ввели численную характеристику начального состояния экономической системы, определяемую формулой (8), которую можно назвать относительным превышением значения производственной функции от начального капитала над начальным уровнем потребления. В терминах этой величины мы дали ограничения на то, во сколько раз может вырасти уровень потребления в процессе эволюции рассматриваемой экономической системы. Более того, мы указали границу, выше которой уровень потребления никак не может подняться, чтобы не нанести ущерб имеющемуся в рассматриваемой структуре экономическому ресурсу.

Полученное ограничение существенно зависит от выбранного в модели значения параметра θ; это объясняется тем, что от параметра θ зависит норма валового сбережения $s(t) = 1 - \frac{C(t)}{f(K(t)}$ (здесь f — производственная функция, в нашем случае функция Кобба –Дугласа), которая в стационарном состоянии (когда $\dot{K}(t) = \dot{C}(t) = 0$) в случае функции Кобба –Дугласа принимает вид:

$$s^* = \alpha \cdot \frac{x + n + \delta}{\rho + \theta x + \delta} = \frac{\alpha}{\theta} \cdot \frac{x_2}{x_1},$$

которая тем меньше, чем больше значение θ. Поэтому с увеличением значения θ ограничения на $C(t)$ делаются менее обременительными.

Статья ставит ряд вопросов. Отметим три из них.

1. Сколь окончательны полученные ограничения? Думается, что они допускают усиления.

2. Если $\theta > 0$, то при $\triangle \geqslant (\theta - 1)^{-1}$ наш метод ограничение на $C(t)$ не даёт. Должно ли оно быть?

3. Как трансформируются ограничения, если $x_2 \neq \alpha x_1$? Например, если разность $x_2 - \alpha x_1$ — очень малое положительное или отрицательное число.

Скажем несколько слов о перспективах развития теоремы 2. Нетрудно убедиться в том, что явное выражение функции v через w позволяет решить систему дифференциальных уравнений (15) в квадратурах, но получающиеся интегралы не вычисляются в элементарных функциях. Поэтому для детального изучения поведения решений системы (15), т.е. функций $v(t)$ и $w(t)$, придётся применять к подынтегральным функциям методы теории приближений, аппроксимируя их функциями, интегралы от которых имеют достаточно простой вид.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оптимальная экспонента в задаче Рамсея–Касса–Купманса с логарифмической функцией полезности // Чебышевский сборник. 2019;20(4):197-207. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207

2. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. О задаче Рамсея-Касса-Купманса для потребительского выбора // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2020. Том 182. С. 39–44. DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

3. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Модель задачи Рамсея-Касса-Купманса // Издательство: Московский педагогический государственный университет (Москва). Классическая и современная геометрия, материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения В. Т. Базылева. под ред. А. В. Царева. Москва. 2019. С. 87-88.

4. Козко А.И., Лужина Л.М., Попов А.Ю., Чирский В.Г. Оценка необходимого начального экономического ресурса в задаче Рамсея–Касса–Купманса // Чебышевский сборник. 2019;20(4):188-196. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196

5. Acemoglu Daron. The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth // Princeton: Princeton University Press. 2009. pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

6. Bénassy Jean-Pascal. The Ramsey Model. Macroeconomic Theory // New York: Oxford University Press. 2011. pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

7. Rahul Giri. Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model // http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf

8. Барро Р. Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2010.

9. Groth Christian and Koch Karl-Josef and Steger Thomas Michael. Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006) // CESifo Working Paper Series No. 1701. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250

10. Groth Christian, Koch Karl-Josef, Steger Thomas Michael. When Economic Growth is Less than Exponential // Economic Theory, Vol. 44, No. 2, 2010.

11. Groth C. Chapter 10: The Ramsey Model // Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf, 2010.

12. Romer D. Advanced Macroeconomics. 3rd ed. // New York: McGraw-Hill/Irwin. 2006. P. 651.

13. Robert J. Barro. Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model // The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press. 1999. Vol. 114. No 4. P. 1125-1152.

14. Paul H. Douglas. In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas // New York, Harcourt Brace Jovanovich. 1972.

15. King Robert G., and Sergio Rebelo. Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model // American Economic Review. 1993. Vol. 83, September, P. 908-931.

16. Pierre-Olivier Gourinchas. Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model // UC Berkeley Fall 2014 https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

17. Акаев А.А., Садовничий В.А. К вопросу о выборе математических моделей для описания динамики цифровой экономики // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 743-752.

18. Gómez, M. A., Economic growth and factor substitution with elastic labor supply // Math. Social Sci., 94, 49-57, (2018)

19. Gómez, M. A., Factor substitution and convergence speed in the neoclassical model with elastic labor supply. // Economics Letters 172, 89-92 (2018)

REFERENCES

1. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Optimal exponent in the Ramsey–Kass–Koopmans problem with logarithmic utility function“, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September, pp. 197-207. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-197-207

2. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2020, “On the Ramsey-Kass-Koopmans problem for consumer choice“, *Results of science and technology. Modern mathematics and its applications. Thematic review.* vol. 182, September, pp. 39-44. (In Russ.) DOI: 10.36535/0233-6723-2020-182-39-44

3. Kozko, A. I., Luzhina, L. M., Popov, A. Yu., Chirskii, V. G. 2019, The model of the problem Ramsey-Kass-Koopmans // *Moscow state pedagogical University (Moscow). Classical and modern geometry, materials of the international conference dedicated to the 100th anniversary of V. T. Bazylev. under the editorship of A. V. Tsarev. Moscow.* pp. 87-88.

4. Kozko A.I., Luzhina L.M., Popov A.Yu., Chirskii V.G. 2019, “Assessment of the necessary initial economic resource in the Ramsey–Kass–Koopmans problem“, *Chebyshevskii Sbornik.* vol. 20(4), September, pp. 188-196. (In Russ.) https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-4-188-196

5. Acemoglu, Daron. 2009, “The Neoclassical Growth Model. Introduction to Modern Economic Growth“, *Princeton: Princeton University Press.* pp. 287–326. ISBN 978-0-691-13292-1.

6. Bénassy, Jean-Pascal. 2011. “The Ramsey Model. Macroeconomic Theory“, *New York: Oxford University Press.* pp. 145–160. ISBN 978-0-19-538771-1.

7. Rahul, Giri. “Growth Model with Endogenous Savings: Ramsey-Cass-Koopmans Model“, 2018, *http://ciep.itam.mx/~rahul.giri/uploads/1/1/3/6/113608/ramsey-cass-koopmans_model.pdf.*

8. Barro, Robert J., Sala-i-Martin, Xavier. 2003, “Economic growth (2nd ed.)“, *Massachusetts: MIT Press*, ISBN 9780262025539.

9. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. 2006, “Rethinking the Concept of Long-Run Economic Growth (April 2006)“, *CESifo Working Paper Series No. 1701.* Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=899250

10. Groth, Christian and Koch, Karl-Josef and Steger, Thomas Michael. “When Economic Growth is Less than Exponential“, 2010. *Economic Theory*, vol. 44, no. 2, 2010.

11. Groth, C. 2010, “Chapter 10: The Ramsey Model“, *Available at: http://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf.*

12. Romer, D. “Advanced Macroeconomics. 3rd ed“, *New York: McGraw-Hill/Irwin*, 2006. pp. 651.

13. Robert J. Barro. 1999. “Ramsey Meets Laibson in the Neoclassical Growth Model“, *The Quarterly Journal of Economics, Oxford University Press*, vol. 114, no. 4, pp. 1125-1152.

14. Douglas, Paul H. 1972. “In the Fullness of Time: The Memoirs of Paul H. Douglas“, *New York, Harcourt Brace Jovanovich.*

15. King Robert, G., and Sergio Rebelo. 1993, “Transitional Dynamics and Economic Growth in the Neoclassical Model“, *American Economic Review.* vol. 83, September, pp. 908-931.

16. Pierre-Olivier, Gourinchas. 2014, “Notes for Econ202A: The Ramsey-Cass-Koopmans Model“, *UC Berkeley Fall*, https://eml.berkeley.edu/~webfac/gourinchas/e202a_f14/Notes_Ramsey_Cass_Koopmans_pog.pdf

17. Akaev A.A., Sadovnichii V.A. 2019. “On the choice of mathematical models for describing the dynamics of digital economy“ Differential Equations. 2019. vol. 55, no. 5. pp. 729-738.

18. Gómez, M. A. 2018. “Economic growth and factor substitution with elastic labor supply“ Math. Social Sci., 94, pp. 49-57.

19. Gómez, M. A. 2018. “Factor substitution and convergence speed in the neoclassical model with elastic labor supply“ Economics Letters 172, pp. 89-92.