ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 517.11

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-490-500

Об экстремальности аффинного образа топологического произведения некоторых многообразий

И. Ш. Джаббаров, Л. Г. Исмаилова

Джаббаров Ильгар Шикар оглы — кандидат физико-математических наук, Гянджинский государственный университет (г. Гянджа).

e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Исмаилова Ляман Галиб кызы — Гянджинский государственный университет (г. Гянджа).

e-mail: leman.ismailova.86@mail.ru

Аннотация

В теории диофантовых приближений рассматриваются вопросы приближения действительных чисел рациональными дробями с одинаковыми знаменателями. Среди интенсивно изучаемых вопросов этой теории особое место занимают метрические аспекты. Здесь рассматриваются такие вопросы теории приближений, которые имеют место для почти всех действительных чисел из заданного промежутка. Впервые подобные вопросы были изучены Хинчином для приближений независимых величин. Им были поучены условия, при которых для почти всех действительных чисел достигается указанная точность приближения рациональными дробями. Очень важный в техническом плане принцип переноса Хинчина позволяет связать совместные приближения зависимых величин с приближениями целочисленных форм.

В 1932 г. Малер К. ввел в рассмотрение классификацию трансцендентных чисел. Он показал, что почти все трансцендентные числа являются S -числами. Более того, Малер доказал существование такой постоянной $\gamma > 0$, что для почти всех ω

$$|P(\omega)| > h^{-n\gamma},$$

каков бы ни был целочисленный многочлен P степени не более n и высоты $h > h_0(\omega, n, \gamma)$. По Малеру можно взять

$$\gamma = 4 + \varepsilon.$$

В этой же работе Малер высказал предположение, что можно взять $\gamma = 1 + \varepsilon$ для почти всех вещественных чисел.

Эту гипотезу доказал Спринджук В. Г. методом существенных и несущественных областей. Одновременно Спринджук В. Г. выдвинул несколько гипотез, обобщающие и уточняющие результаты Малера. В дальнейшем исследования Спринджук привели к развитию нового направления в теории диофантовых приближений — исследованию экстремальности многообразий.

В настоящей статье мы развиваем новый подход к этим вопросам и предлагаем новое доказательство экстремальности алгебраических многообразий. Предлагаемый метод позволяет установить экстремальность аффинного образа топологических произведений некоторых многообразий. На одном примере мы доказываем, что экстремальность таких многообразий можно вывести из теорем о показателе сходимости особого интеграла проблемы Терри, используя лемму Ковалевской Э. И. Далее из полученного результата мы выведем частный случай гипотезы Спринджук об экстремальности многообразия, порожденного одночленами некоторого многочлена от двух переменных.

Ключевые слова: Диофантовы приближения, экстремальное многообразие, показатель сходимости, особый интеграл, проблема Терри.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

И. Ш. Джаббаров, Л. Г. Исмаилова. Об экстремальности аффинного образа топологического произведения некоторых многообразий // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 490–500.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 517.11

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-490-500

On extremality of affine image of topological product of some varieties

I. Sh. Jabbarov, L. G. Ismailova

Jabbarov Ilgar Shikar oglu — candidate of physical and mathematical sciences, Ganja State University (Ganja).

e-mail: ilgar_j@rambler.ru

Ismailova Leman Galib gizi — Ganja State University (Ganja).

e-mail: leman.ismailova.86@mail.ru

Abstract

In the theory of Diophantine Approximations one considers a question on approximation of Real Numbers by rational fractions with one and the same denominators. Among intensively studied questions of this theory a special place occupy Metric questions. Here such questions of the theory are considered which take place for almost all real numbers from given interval. For the first time similar questions have been studied by Khintchine for approximation of independent quantities. It had been investigated by him conditions at which for almost all real numbers specified accuracy of approximation is reached. Very important in the technical plan Khintchine's transference principle allows us to connect a simultaneous approximations of dependent quantities with approximations of linear forms with integral coefficients.

In 1932 Mahler K. has entered classification of transcendental numbers into consideration. He showed that almost all transcendental numbers are S -numbers. Moreover, Mahler had proved an existence of a constant $\gamma > 0$ such that for almost all ω

$$|P(\omega)| > h^{-n\gamma},$$

for all polynomials P of degree no more n and height $h > h_0(\omega, n, \gamma)$. Mahler showed that it is possible to take

$$\gamma = 4 + \varepsilon.$$

In the same work Mahler made an assumption that it is possible to take $\gamma = 1 + \varepsilon$ for almost all real numbers.

This hypothesis was proved by Sprindzhuk V. G by a method of essential and non-essential domains. Simultaneously, Sprindzhuk V. G. advanced some hypotheses generalising and improving Mahler's results. Further these investigations of Sprindzuk led to the development of a new direction in the theory of Diophantine Approximations – to the research of extremality of manifolds.

In the present article we develop a new approach to these questions and offer a new proof for extremality of algebraic varieties. This method allows to establish extremality of affine image of topological product of some varieties. Considering one particular case, we prove that the extremality for these varieties is possible to deduct from theorems on the convergence exponent of a special integral of Terry's problem, using E.I. Kovalevskaya's lemma. Further, we derive from the getting result particular case of the Sprindzuk's hypothesis on extremality of varieties, induced by monomials of a polynomial in two variables.

Keywords: Diophantine approximation, extremal manifold, convergence exponent, special integral, Terry's problem.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

I. Sh. Jabbarov, L. G. Ismailova, 2021, "On extremality of affine image of topological product of some varieties", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 490–500.

Введение

Рассмотрим множество всех многочленов от переменной x с целыми коэффициентами, степени которых не превосходят n :

$$\Pi = \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Число

$$H(f) = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_n|)$$

называется высотой многочлена $f(x)$. Пусть дано действительное трансцендентное число α (следовательно, α не является корнем никакого из многочленов рассматриваемого семейства Π). Пусть $H > 0$ действительное число. Будем, при заданном $H > 0$, рассмотреть такие многочлены, у которых высота не превосходит H (ясно, что количество таких многочленов конечно). Обозначим через $\gamma_0 = \gamma_0(\alpha)$ точную верхнюю грань тех положительных чисел $\gamma > 0$, для которых неравенство

$$|f(\alpha)| < H^{-\gamma}; \quad H = H(f) \quad (1)$$

выполняется для бесконечного количества многочленов из Π , когда $H \rightarrow \infty$; другими словами для любого $\varepsilon > 0$ найдется не ограниченная сверху возрастающая последовательность $H_1, \dots, H_m, \dots$ такая, что (1) выполнено для всех таких H_m при

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon.$$

Вводя классификацию ([8]) Малер ([9]) высказал предположение, что $\gamma_0 = n$. Это предположение было доказано в [11].

В работах [10], [11, стр. 433] Спринджук В. Г. сформулировал ряд проблем теории диофантовых приближений, касающихся экстремальным многообразиям. К настоящему времени эти гипотезы доказаны (наиболее общая из них установлена Д. Клейнбоком и Г. Маргулисом [12]). В данной работе мы рассматриваем частный случай одной из гипотез Спринджук В. Г., и докажем экстремальность аффинного образа топологического произведения ([3], [10, стр. 67]) многообразий, порожденных одночленами рассматриваемого многочлена степени 3 (заметим, что мы рассматриваем только действительный вариант) новым путем, используя лемму 2 и теорему из [1, стр. 51] (см. также [4]). Заметим, что примененный способ пригоден и для многочленов более высоких степеней.

Пусть

$$P(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3,$$

— целочисленный многочлен степени 3. Пусть, далее, $v(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2h}, \beta_{2h})$ означает точную верхнюю грань тех $v > 0$, для которых существует бесконечное число целочисленных многочленов P , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \sum_{j=1}^h (P(\alpha_j, \beta_j) - P(\alpha_{j+h}, \beta_{j+h})) \right| < H^{-v},$$

$$H = \max(|a_0|, \dots, |a_9|).$$

Теорема. Для почти всех $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2h}, \beta_{2h}) \in \mathbb{R}^{4h}$

$$v(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2h}, \beta_{2h}) = 9,$$

где $h = 12$.

Замечание. Следует заметить, что нижняя граница для h определяется условием $2h > \gamma$, где γ – показатель сходимости двумерной проблемы Терри с многочленом $P(x, y)$. Согласно оценке, найденной в [5], можно взять $h = 6$.

Следствие. Для почти всех $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$v(\alpha, \beta) = 9.$$

Вспомогательные результаты

Для установления наших результатов перейдем к равносильному варианту поставленной задачи, выражая ее в виде экстремальности многообразий. Сначала заметим, что полученные выше соотношения можно интерпретировать по-другому. А именно, пусть нам задана система действительных чисел $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$. Рассмотрим неравенство

$$\|b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \dots + b_n\eta_n\| \leq b^{-v}, \quad (2)$$

где $\|x\|$ означает расстояние от x до ближайшего целого числа, $b = \max(|b_1|, \dots, |b_n|)$, причем $b > 0, v > 0$. Обозначим через $v(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ точную верхнюю грань всех тех $v > 0$, для которых (2) выполнено для бесконечного числа целых векторов $(b_1, \dots, b_n)$. Одновременно, рассмотрим следующее неравенство:

$$\max(\|q\eta_1\|, \|q\eta_2\|, \dots, \|q\eta_n\|) \leq q^{-u}. \quad (3)$$

Теперь обозначим через $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ точную верхнюю грань всех тех $u > 0$, для которых (3) выполнено для бесконечного числа целых положительных $q > 0$. В теории диофантовых приближений существует принцип, называемый принципом переноса Хинчина (см. [3, 7, 10]), утверждающая, что равенства $v(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = n$ и $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = 1/n$ равносильны. Опять – таки из принципа ящиков Дирихле следует соотношение

$$u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \geq 1/n.$$

Полагая $n = 9$ в качестве чисел $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9$ возьмем следующие многочлены в топологическом произведении многообразий, порожденных одночленами положительной степени рассматриваемого многочлена P :

$$\begin{aligned} \eta_9 &= \sum_{j=1}^h (\beta_j^3 - \beta_{j+h}^3), \eta_8 = \sum_{j=1}^h (\alpha_j \beta_j^2 - \alpha_{j+h} \beta_{j+h}^2), \eta_7 = \sum_{j=1}^h (\alpha_j^2 \beta_j - \alpha_{j+h}^2 \beta_{j+h}), \\ \eta_6 &= \sum_{j=1}^h (\alpha_j^3 - \alpha_{j+h}^3), \eta_5 = \sum_{j=1}^h (\beta_j^2 - \beta_{j+h}^2), \eta_4 = \sum_{j=1}^h (\alpha_j \beta_j - \alpha_{j+h} \beta_{j+h}), \\ \eta_3 &= \sum_{j=1}^h (\alpha_j^2 - \alpha_{j+h}^2), \eta_2 = \sum_{j=1}^h (\beta_j - \beta_{j+h}), \eta_1 = \sum_{j=1}^h (\alpha_j - \alpha_{j+h}). \end{aligned}$$

Тогда можем записать

$$b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + \dots + b_9\eta_9 = \sum_{j=1}^h (P(\alpha_j, \beta_j) - P(\alpha_{j+h}, \beta_{j+h})),$$

т. е. неравенство (2) совпадет с неравенством рассмотренным выше для многочлена P , с коэффициентами $a_1 = b_1, \dots, a_9 = b_9$ (a_0 – произвольный), при этом b заменится на H . Тогда, с учетом принципа переноса Хинчина, мы должны показать, что

$$u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9) = 1/9,$$

где $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9)$ обозначает точную верхнюю грань тех $u > 0$, для которых (3) выполнено для бесконечного числа целых положительных $q > 0$.

Лемма 1. Пусть A_q некоторая последовательность измеримых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ такая, что ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \text{mes} A_q < \infty.$$

сходится. Тогда, мера подмножества A тех точек $\bar{x} \in R^n$, которые попадают в бесконечное семейство подмножеств A_q равна нулю.

Эта лемма хорошо известно из литературы и носит название леммы Бореля-Кантелли (см. [10]).

Следующая лемма принадлежит Э. И. Ковалевской (см. [2, 6, 10]).

Лемма 2. Пусть $m \leq N$ q -натуральные числа, $f_j(\bar{x})$, $j = 1, \dots, N$ - действительные измеримые функции, определенные в кубе $\Omega = [0, 1]^m$. Обозначим через $\mu(q)$ меру множества таких точек $\bar{x} \in \Omega = [0, 1]^m$, для которых

$$\|f_j(\bar{x})\| < q^{-r_j} (1 \leq j \leq N).$$

Тогда,

$$\mu(q) << q^{-r} \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \dots \sum_{|c_N| < q^{r_N}} \left| \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 f_1(\bar{x}) + \dots + c_N f_N(\bar{x}))} d\bar{x} \right|,$$

где $r = r_1 + \dots + r_N$, а постоянная скрытая под символом $<<$ зависит лишь от N .

Доказательство этой леммы можно найти в [2, 10].

Введем следующие обозначения:

$$f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y, f_3(x, y) = x^2, f_4(x, y) = xy,$$

$$f_5(x, y) = y^2, f_6(x, y) = x^3, f_7(x, y) = x^2y, f_8(x, y) = y^2x, f_9(x, y) = y^3$$

Лемма 3. Существует натуральное число h , обладающее свойством: определитель Грама градиентов функций

$$\sum_{j=1}^h f_i(x_j, y_j), i = 1, \dots, 9, \quad (4)$$

отличен от нуля почти всюду в $\mathbb{R}^{2h}$.

Доказательство. Пусть $h \geq 9$. В этом случае матрица Якоби содержит 9 столбцов, образованных взятием частных производных рассматриваемых функций по переменным $x_1, y_2, x_3, y_4, x_5, y_6, x_7, y_8, x_9$. А именно, первый столбец содержит одночлены только от переменных x_1, y_1 , второй столбец – одночлены только от переменных x_2, y_2 и т. д. При этом, матрица Якоби не содержит нулевых строк. Поэтому, минор с такими столбцами содержит 9!

попарно разных произведений в своем раскрытии, которые не могут исчезать путем приведения подобных членов. Тогда этот минор представляет собой ненулевой многочлен и может обращаться в нуль только на замкнутом подмножестве пространства $\mathbb{R}^{18}$ меры нуль. Поскольку определитель Грама равен сумме квадратов всевозможных миноров матрицы Якоби (см. [13, стр. 245]), то утверждение леммы доказана.

Заметим, также, что на самом деле можно взять $h \geq 6$ (см. [5]).

Доказательство теоремы

Введем обозначение $\Omega = [0, 1]^2$. Рассмотрим функции

$$g_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) = f_j(\bar{x}_1) + \dots + f_j(\bar{x}_h) - f_j(\bar{x}_{h+1}) - \dots - f_j(\bar{x}_{2h}), j = 1, \dots, 9,$$

где $\bar{x}_i = (x_i, y_i), i = 1, \dots, 2h$, а значение h будем уточнять ниже. По сказанным выше, нам достаточно доказать, что $4h$ -мерное многообразие

$$\begin{aligned} \Gamma^* = & (g_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_2(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_3(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_4(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_5(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), \\ & g_6(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_7(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_8(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}), g_9(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h})) \end{aligned}$$

является экстремальным (т. е. равенство $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_9) = 1/9$ выполняется почти для всех $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{2h}, \beta_{2h}) \in \Omega^{2h}$ (см. [10, стр. 65])), как аффинный образ топологического произведения $2h$ экземпляров двумерного многообразия

$$\Gamma = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y), f_4(x, y), f_5(x, y), f_6(x, y), f_7(x, y), f_8(x, y), f_9(x, y)).$$

В лемме 2 положим $r_j = 1/9 + \delta$, где δ -произвольно малое положительное число.

Рассмотрим систему неравенств:

$$\begin{aligned} & \|q(g_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}))\| = \\ & = \|q(f_j(\bar{x}_1) + \dots + f_j(\bar{x}_h) - f_j(\bar{x}_{h+1}) - \dots - f_j(\bar{x}_{2h}))\| \leq q^{-r_j}, j = 1, \dots, 9, \end{aligned} \quad (5)$$

Нетрудно заметить, что если мы положим $\bar{x}_j = (\alpha_j, \beta_j)$, то получим систему неравенств (3). Нам надо показать, что $u(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = 1/n$ для почти всех $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$.

Введем в рассмотрение множество точек в Ω^{2h} , для которых (5) выполнено, т. е. множество

$$B_q = \{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h, \bar{x}_{h+1}, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h} : \|qg_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h})\| \leq q^{-r_j}, j = 1, \dots, 9.\}$$

Через B обозначим подмножество тех кортежей $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h, \bar{x}_{h+1}, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$, которые попадают в бесконечное множество подмножеств B_q . Мы докажем, что $mes B = 0$. Для этого, согласно лемме Бореля -Кантелли, достаточно доказать сходимость ряда $\sum_{q=1}^{\infty} \mu_q$, где $\mu_q = mes(B_q)$.

По лемме 2, для меры $\mu_q = mes(B_q)$ подмножества точек, с условиями (5), получаем:

$$\begin{aligned} & \mu_q < q^{-1-9\delta} \times \\ & \times \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \dots \sum_{|c_9| < q^{r_9}} \left| \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q g_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) + \dots + c_9 q g_9(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_{2h} \right| = \\ & = q^{-1-9\delta} \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \dots \sum_{|c_9| < q^{r_9}} \left| \left(\int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q f_1(\bar{x}) + \dots + c_9 q f_9(\bar{x}))} d\bar{x} \right)^h \right|^2. \end{aligned}$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q f_1(\bar{x}) + \dots + c_9 q f_9(\bar{x}))} d\bar{x} \right)^h = \\ & = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q(f_1(\bar{x}_1) + \dots + f_1(\bar{x}_h)) + \dots + c_9 q(f_9(\bar{x}_1) + \dots + f_9(\bar{x}_h)))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_h. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно формуле замены переменных из работ [4, 5], имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q(f_1(\bar{x}_1) + \dots + f_1(\bar{x}_h)) + \dots + c_9 q(f_9(\bar{x}_1) + \dots + f_9(\bar{x}_h)))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_h = \\ & = \int_0^h \dots \int_0^h du_1 \dots du_9 e^{2\pi i q(c_1 u_1 + \dots + c_9 u_9)} \int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Pi(\bar{u})$ обозначает поверхность, определяемую системой уравнений

$$f_j(\bar{x}_1) + \dots + f_j(\bar{x}_h) = u_j, \quad j = 1, \dots, 9,$$

а G обозначает определитель Грама градиентов функций стоящих на левых частях уравнений этой системы. Заметим, что согласно лемме 3, левую часть равенства (7) можно представить в виде несобственного интеграла, предварительно выделив некоторое окружение (см. [13, стр. 204]) множества точек, где $G = 0$, с достаточно малой мерой. Тогда, соответственно этому, и правую часть равенства (7) также следует понимать в несобственном смысле. Более строго говоря, введем множество

$$M_{\eta} = \{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h) \in \Omega^h | G \geq \eta > 0\}.$$

Тогда, получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q(f_1(\bar{x}_1) + \dots + f_1(\bar{x}_h)) + \dots + c_9 q(f_9(\bar{x}_1) + \dots + f_9(\bar{x}_h)))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_h = \\ & = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{M_{\eta}} e^{2\pi i(c_1 q(f_1(\bar{x}_1) + \dots + f_1(\bar{x}_h)) + \dots + c_9 q(f_9(\bar{x}_1) + \dots + f_9(\bar{x}_h)))} d\bar{x}_1 \dots d\bar{x}_h \end{aligned}$$

Следовательно, правую часть равенства (7) следует записать в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^h \dots \int_0^h \left(\int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\eta}} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right) e^{2\pi i q(c_1 u_1 + \dots + c_9 u_9)} d\bar{u} = \\ & = \int_0^h \dots \int_0^h \left(\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\eta}} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right) e^{2\pi i q(c_1 u_1 + \dots + c_9 u_9)} d\bar{u}. \end{aligned}$$

Выражение $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\eta}} \frac{ds}{\sqrt{G}}$ под интегралом определяет функцию от $\bar{u}$, которая, в силу положительности и монотонности относительно η , имеет вполне определенное, конечное или бесконечное значение. Полагая, для удобства $\eta = 1/m$, будем иметь:

$$\begin{aligned} & \int_0^h \dots \int_0^h \left| \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\lambda}} \frac{ds}{\sqrt{G}} - \left(\int_{\Pi(\bar{u}) \cap M_{\eta}} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right) \right| d\bar{u} \leq \\ & \int_0^h \dots \int_0^h \sum_{n \geq m} \int_{\Pi(\bar{u}) \cap (M_{1/n} \setminus M_{1/(n+1)})} \frac{ds}{\sqrt{G}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_{\Omega^h \setminus M_{1/m}} dx_1 dy_1 \cdots dx_h dy_h \rightarrow 0,$$

при $\eta \rightarrow 0$, что доказывает возможность указанного выше перехода к пределу под знаком интеграла.

Представим интеграл на правой части (7) в виде суммы коэффициентов Фурье от кусков внутреннего поверхностного интеграла, который понимается в несобственном смысле. С этой целью разобьем интеграл на правой части (6) в сумму интегралов, взятых по единичным кубам. Для этого представим интеграл на правой части (6) в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^h \cdots \int_0^h du_1 \cdots du_9 e^{2\pi i(c_1 qu_1 + \cdots + c_9 qu_9)} \int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}} = \\ & = \sum_{h_1=1}^h \cdots \sum_{h_9=1}^h \int_{h_1-1}^{h_1} \cdots \int_{h_9-1}^{h_9} \phi(u_1, \dots, u_9) e^{2\pi i(c_1 qu_1 + \cdots + c_9 qu_9)} du_1 \cdots du_9, \end{aligned}$$

причем,

$$\phi(u_1, \dots, u_9) = \begin{cases} \int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}}, & \text{если } \Pi(\bar{u}) \neq \emptyset \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, при каждом фиксированном q , согласно сказанным выше, получаем:

$$\begin{aligned} & \left| \left(\int_{\Omega} e^{2\pi i(c_1 q f_1(\bar{x}) + \cdots + c_9 q f_9(\bar{x}))} d\bar{x} \right)^h \right|^2 \leq h^9 \times \\ & \sum_{h_1=1}^h \cdots \sum_{h_9=1}^h \left| \int_{h_1-1}^{h_1} \cdots \int_{h_9-1}^{h_9} \phi(u_1, \dots, u_9) e^{2\pi i(c_1 qu_1 + \cdots + c_9 qu_9)} du_1 \cdots du_9 \right|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \mu_q & \ll q^{-1-9\delta} \sum_{h_1=1}^h \cdots \sum_{h_9=1}^h \sum_{|c_1| < q^{r_1}} \cdots \sum_{|c_9| < q^{r_9}} 1 \times \\ & \times \left| \int_{h_1-1}^{h_1} \cdots \int_{h_9-1}^{h_9} \phi(u_1, \dots, u_9) e^{2\pi i(c_1 qu_1 + \cdots + c_9 qu_9)} du_1 \cdots du_9 \right|^2 \end{aligned}$$

Очевидно, на правой части суммы по $(c_1, \dots, c_9)$ не превосходят всю сумму квадратов модулей коэффициентов Фурье функции $\phi(u_1, \dots, u_9)$. Тогда, по равенству Парсеваля имеем:

$$\begin{aligned} \mu_q & \ll q^{-1-9\delta} \times \\ & \times \sum_{h_1=1}^h \cdots \sum_{h_9=1}^h \int_{h_1-1}^{h_1} \cdots \int_{h_9-1}^{h_9} du_1 \cdots du_9 \left(\int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right)^2 = \\ & = q^{-1-9\delta} \int_0^h \cdots \int_0^h du_1 \cdots du_9 \left(\int_{\Pi(\bar{u})} \frac{ds}{\sqrt{G}} \right)^2 \end{aligned}$$

Как установлено в [4, стр. 78] (см. также [5]), кратный интеграл на правой части равенства представляет собой особый интеграл проблемы Терри с многочлен теоремы 10 кн. [1] степени 3 ($r = 2$). Поскольку

$$2 \binom{5}{2} + 2 = 22,$$

то как было установлено в [1], особый интеграл сходится, если $h = 12$. Тогда, ряд

$$\sum_{q=1}^{\infty} \mu_q$$

сходится. Согласно лемме Бореля - Кантелли, подмножество B имеет меру нуль.

Нами доказано, что при $h = 12$ подмножество тех кортежей $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_h, \bar{x}_{h+1}, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$, которые попадают в подмножества B_q для бесконечного количества натуральных чисел q , имеет меру нуль. Возьмем последовательность чисел $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \rightarrow 0$ и найдем последовательность множеств $M_1, M_2, \dots$ меры нуль, точки каждого из которых попадают в подмножества B_q для бесконечного количества натуральных чисел q , с соответствующим значением δ_n . Обозначим $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.

Имеем $mes M = 0$. Для точек $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h} \setminus M$ система неравенств

$$\|qg_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h})\| \leq q^{-r_j}, j = 1, \dots, 9 \quad (8)$$

уже для любого положительного $\delta > 0$ может выполняться только для конечного числа натуральных чисел q . Это означает, что почти для всех $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$ точная верхняя грань тех чисел $u > 0$, для которых система

$$\|qg_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h})\| \leq q^{-u}, j = 1, \dots, 9$$

имеет место для бесконечного множества натуральных чисел q , не превосходит $1/9$. Далее, из принципа Дирихле следует, что эта точная грань не меньше чем $1/9$. Следовательно, в обозначениях, введенных выше, выполняется равенство $u(\eta_1, \dots, \eta_9) = 1/9$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Обратимся теперь к доказательству следствия.

Введем множество

$$A_q = \{\bar{x} \in \Omega \mid \|qf_j(\bar{x})\| < (1/2h)q^{-r_j} (1 \leq j \leq 9)\}.$$

Очевидно имеем: $A_q^{2h} \subset B_q$. Из этого следует, что для любого положительного $\delta > 0$ множество A тех точек $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h}$, для которых соотношение

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in A_q^{2h}$$

выполняется для бесконечного количества натуральных чисел q является подмножеством множества B таких же точек, для которых соотношение

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in B_q$$

выполняется для бесконечного количества натуральных чисел q , т. е. $A \subset B$.

Далее, по теореме Фубини проекция C множества $\Omega^{2h} \setminus M$ на плоскость (x, y) имеет полную меру. Нам надо доказать, что для всех $(x, y) \in C$ система неравенств

$$\|qf_j(\bar{x})\| < q^{-u-1/9} (1 \leq j \leq 9) \quad (9)$$

для всех $u > 0$ имеет место лишь для конечного числа чисел q . Допустим противное. Пусть для некоторого $(x, y) \in C$ найдется $u > 0$ такое, система (9) выполняется для бесконечного множества натуральных чисел q . Тогда, полагая $(x, y) = \bar{x}_1 = \dots = \bar{x}_{2h}$, и учитывая равноправность переменных $\bar{x}_j$, получаем, что (8) выполняется для бесконечного множества натуральных чисел q , когда $\delta = u$, при этом $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{2h}) \in \Omega^{2h} \setminus M$. Это противоречит доказанному выше. Итак, почти для всех точек из Ω (9) выполняется.

Следствие доказано.

Заключение

Следует заметить, что хотя в статье мы рассмотрели частный случай многочлена третьей степени с двумя переменными, результат работы можно обобщить на случай многочленов от нескольких переменных и произвольной положительной степени. Всегда найдется специальный аффинный образ топологического произведения экземпляров многообразий, порожденных одночленами данного многочлена, являющийся экстремальным.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987, 368 с.
2. Берник В. И., Ковалевская Э. И. Экстремальное свойство некоторых поверхностей в n -мерном евклидовом пространстве. // Матем. заметки, 1974, том 15, выпуск 2, 247–254.
3. Касселе Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. М.:ИИЛ, 1961, 212стр.
4. Джаббаров И. Ш., О показателе сходимости особого интеграла многомерной проблемы Терри, *Чебышевский Сборник*, 14:2 (2013), 74-103.
5. Джаббаров И. Ш. О многомерной проблеме Терри для кубического многочлена // Математические заметки, том 107, выпуск 5, (2020), стр. 657-673 (в печати).
6. Ковалевская Э. И. Совместно экстремальные многообразия.// Матем. заметки, 1987, том 41, выпуск 1, 3–8.
7. Khintchine A., Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, *Circolo mat. Palermo* 50, 1926, 175-195.
8. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus. I, II., *J. reine und angew. Math.*, 1932, 166, S. 118–150.
9. Mahler K. Über das Mass der Menge aller S-Zahlen.— *Math. Ann.*, 1932, v. 106 pp. 131 — 139.
10. Спринджук В. Г. Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977, 143 стр.
11. Спринджук В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, т. 29 вып.2, стр. 379–436.
12. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // *Ann. Math.*—1998.—Vol. 148.—P. 339–360.
13. Шилов Г. Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных).— М.:Наука, 1972.

REFERENCES

1. Archipov, G. I., Karatsuba, A. A. & Chubarikov V. N. 1987. The Theory of multiple trigonometric sums, Moscow: Nauka, pp. 368.
2. Bernik V. I., Kovalevskaya E. I. 1974, “Extremality property of some surfaces in n dimensional space”, *Mathematical Notes*, v. 15, issue 2, pp. 247–254.

3. Kassels, J. B. C. 1961. Introduction to the theory of Diophantine Approximations, Moscow: IIL, pp. 212.
4. Dzhabbarov I. Sh., The exponent of convergence of a special integral in multidimensional problems Terry, *Chebyshevskii Sbornik*, 14:2 (2013), 74-103.
5. Dzhabbarov, I. Sh. 2020. On multidimensional Tarry's problem for a cubic polynomial, *Matematicheskie zametki*, v.107, issue 5 pp. 657–673 (to appear).
6. Kovalevskaya E. I. 1987, "Simultaneously extremal manifolds", *Mathematical Notes*, v. 41, issue 1, pp. 3-8.
7. Khintschine A., 1926, "Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen", *Circolo mat. Palermo* 50, pp. 175-195.
8. Mahler K. 1932, "Zur Approximation der Exponentialfunktionen und des Logarithmus", I, II., *J. reine und angew. Math.*, v. 166, pp. 118–150.
9. Mahler K. 1932, "Über das Mass der Menge aller S-Zahlen", *Math. Ann.*, 1932, v. 106 pp. 131 — 139.
10. Sprindzuk B. Г. 1977. Metric theory of Diophantine Approximations, Moscow: Nauka, pp.143.
11. Sprindzuk V. G. 1965, "A proof of Mahler's conjecture on the measure of the set of S-numbers", *Izvestiya: Mathematics*, v.29, 2, pp. 379–436.
12. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. 1998, "Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds", *Ann. Math.*, v. 148, pp. 339–360.
13. Shilov G. E. 1972. Mathematical Analysis (functions of several real variables), Moscow: Nauka, pp. 622.