ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 22. Выпуск 2.

УДК 51(09) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-417-436

# Из истории понятия структурной устойчивости[1]

Р. Р. Мухин

**Мухин Равиль Рафкатович** — доктор физико-математических наук, Старооскольский технологический университет им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» (г. Старый Оскол).
*e-mail: mukhiny@mail.ru*

**Аннотация**

**Цель.** Целью работы является изучение истории представлений о грубости (структурной устойчивости), которая является не только одним из важнейших понятий теории нелинейных систем, но лежит в основе нашего миропонимания. До настоящего времени структурная устойчивость рассматривалась в историческом плане лишь фрагментарно (главным образом, в связи со школой Андронова) и не являлась предметом последовательного исторического исследования. **Метод.** Исследование основано на анализе оригинальных работ, историко-научной литературы с привлечением воспоминаний участников описываемых событий. **Результаты.** В школе Андронова в контексте прикладных проблем исчерпывающим образом были изучены двумерные системы, для которых структурная устойчивость является типичным свойством. С конца 1950-х гг. происходит смещение исследований структурной устойчивости в контексте прикладных проблем в сторону теории динамических систем. М. Пейксото изучил структурную устойчивость на замкнутых двумерных многообразиях и доказал плотность таких систем. С. Смейл выдвинул гипотезу о существовании структурно устойчивых систем в многомерном случае ($n \geqslant 3$). Такие системы существуют (системы Морса-Смейла), но он сам установил их нетипичность, они не составляют плотного множества. Для многомерных систем характерно сложное поведение, был построен пример такой системы (подкова Смейла). Изучение систем со сложным поведением стимулировало развитие гиперболической теории. **Обсуждение.** Структурная устойчивость явилась важным фактором открытия сложного поведения динамических систем уже в трехмерном случае, она продолжает играть значительную роль в современной теории динамических систем. Структурная устойчивость имеет общенаучное значение, сыграла ключевую роль в построении теории катастроф, она вышла за рамки теории динамических систем и самой математики, проникает в другие области науки, в том числе в гуманитарную сферу.

*Ключевые слова:* динамическая система, грубость, структурная устойчивость, топологическая эквивалентность, типичность, трансверсальность, плотное множество.

*Библиография:* 74 названия.

**Для цитирования:**
Р. Р. Мухин. Из истории понятия структурной устойчивости // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 417–436.

[1]Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект № 20-011-00402 А.).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 51(09) DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-417-436

# From the history of the concept of structural stability[2]

R. R. Mukhin

**Mukhin Ravil' Rafkatovich** — doctor of physical and mathematical sciences, Ugarov Stary Oskol Technological Institute (branch) National University of Science and Technology «MISiS» (Stary Oskol).
*e-mail: mukhiny@mail.ru*

**Abstract**

**Aim.** The aim of the work is to study the history of ideas about coarseness (structural stability), which is not only one of the most important concepts of the theory of nonlinear systems, but lies at the heart of our worldview. To nowadays, structural stability has been considered in historical terms only fragmentarily (mainly in connection with the Andronov school) and has not been the subject of a consistent historical study. **Method.** The study is based on an analysis of original works, historical and scientific literature with the involvement of the memories of participants in the events described. **Results.** In Andronov's school, in the context of applied problems, two-dimensional systems for which structural stability is a typical property have been exhaustively studied. Since the late 1950s there is a shift in research on structural stability in the context of applied problems towards the theory of dynamical systems. M. Peixoto studied structural stability on closed two-dimensional manifolds and proved the density of such systems. S. Smale hypothesized the existence of structurally stable systems in the multidimensional case ($n \geqslant 3$) . Such systems exist (Morse-Smale systems), but he himself established their atypicality, they do not constitute a dense set. Multidimensional systems are characterized by complex behavior; an example of such a system (Smale's horseshoe) was built. The study of systems with complex behavior stimulated the development of hyperbolic theory. **Discussion.** Structural stability was an important factor in the discovery of the complex behavior of dynamical systems already in the three-dimensional case; it continues to play a significant role in the modern theory of dynamical systems. Structural stability is of general scientific importance, played a key role in the construction of catastrophe theory, it went beyond the framework of the theory of dynamical systems and mathematics itself, penetrates into other areas of science, including the humanitarian sphere.

*Keywords:* dynamical system, coarseness, structural stability, topological equivalence, typicality, transversality, dense set.

*Bibliography:* 74 titles.

**For citation:**
R. R. Mukhin, 2021, "From the history of the concept of structural stability", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 417–436.

*"Гипотеза о структурной устойчивости изолированных научных процессов является скрытым постулатом любого научного наблюдения".*
*Рене Том* [1]

[2]This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 20-011-00402.

## Введение

Грубость или структурная устойчивость принадлежит не только к числу важнейших понятий нелинейной динамики, но находится в основе нашего миропонимания. Оно пришло из теории дифференциальных уравнений. Генезис и эволюция этого понятия дают возможность взглянуть под определенным ракурсом на то, каким нам вообще представляется мир.

К Г. Галилею восходит идея о том, что понять природу можно только на языке математики [2, С.41]. Более конкретно, задачи естествознания привели к дифференциальным уравнениям, и они стали для них первичной математической структурой. И. Ньютон одним из первых обратился к дифференциальным уравнениям, и свой главный результат он закодировал в двух анаграммах, смысл которых В.И. Арнольд передает таким образом : "Data aequantione fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa" – "Полезно решать дифференциальные уравнения" [3, С.5]. В этой фразе содержатся научная программа и идеология, занявшие доминирующе положение на период более, чем на два столетия. Сложился идеал научной рациональности на уровне парадигмы, которая в наиболее радикальном виде была сформулирована П.С. Лапласом: в принципиальном отношении реальный мир полностью подчинен определенным, строгим, динамическим закономерностям, описываемыми дифференциальными уравнениями, и в идеале может быть получена полная информация точным, исчерпывающим образом [4].

Такая вера в простоту миропорядка сохранялась вплоть до первых десятилетий XIX в. Изучение дифференциальных уравнений главным образом стимулировалось задачами механики и физики. Давно было понято, что возможность интегрирования дифференциальных уравнений крайне ограничена. В свете глубокой реформы математического анализа в XIX в., когда формировалась методология установления условий и границ каждого утверждения [5], встал вопрос о понятии самой интегрируемости [6]-[8]. В практическом отношении разложением в ряды, непрерывные дроби или с помощью численного интегрирования можно было решить уравнения с нужной степенью точности. Но сам такой подход оставался внутренне неудовлетворительным. Не было главного – понимания. Было ясно, что, если выбрать путь изобретения новых трансцендентностей, то он ведет в тупик. Требовались кардинально новые идеи.

Выход был указан Анри Пуанкаре. Он предложил подход к интегрированию дифференциальных уравнений, исходя из качественных методов [9, 10] (1881-1886). Необходимо, по его словам, «изучать функции, определяемые дифференциальными уравнениями, сами по себе, не пытаясь сводить их к более простым функциям»[10, С.11]. Качественные методы явились одной из форм реализации интенсивно проходившей во второй половине XIX в. геометризации математики. Геометрия стала способом рассуждений, язык геометрии и ее образы проникли в далекие от нее самой области. Качественные методы явились прорывом в новый мир, но, что еще более важно, это был новый способ думать. Дальнейшее развитие пошло в нескольких направлениях. Наше внимание будет сосредоточено на одном из них, находящегося в русле идей Пуанкаре.

В понятии грубости пересеклись два главных аспекта идеологии качественных методов – глобальный подход, когда рассматривается поведение системы во всем фазовом пространстве, и устойчивость. Понятие устойчивости, которое после длительного развития получило свою современную форму в теории А.М. Ляпунова, заняло в качественных методах важнейшее место. Идея грубой системы была мотивирована в первую очередь физическими задачами. Поскольку сами дифференциальные уравнения, описывающие систему, известны лишь приближенно, возникает вопрос об изменении структуры интегральных кривых при изменении правых частей уравнений. Такая постановка задачи совершенно не была характерна ранее. После создания в XVII в. анализа бесконечно малых, формулировки законов механики и закона всемирного тяготения начался блистательный двухвековой период, где доминирующее место заняла небесная механика. Успехи небесной механики сильнейшим образом воздействовали на формирование научного мировоззрения того времени. Понятно, что в этих условиях не вставал вопрос об изменении самих дифференциальных уравнений системы. С появлением в XX в. новых задач, в первую очередь поставленных бурно развивающейся радиотехникой, мотивировка введения грубых систем приобрела актуальность.

Видимо, первый шаг в указанном направлении был предпринят латышским математиком Пирсом Болем в 1913 г. в мемуаре «О дифференциальных неравенствах» [11]-[13]. Поскольку дифференциальные уравнения, описывающие систему, и их решения являются по своему характеру приближенными, Боль задался вопросом о дополнении дифференциальных уравнений слагаемыми, не превосходящими некоторой константы. Другими словами, Боля интересовала точность описания какого-либо процесса решениями дифференциальных уравнений, поскольку сами уравнения описывают этот процесс с известной погрешностью. Боль пишет, что при этом он не решился ввести новое понятие устойчивости, отказавшись от шага фундаментальной важности. Во всяком случае статья Боля [11] явилась предтечей основополагающей работы Александра Александровича Андронова и Льва Семеновича Понтрягина [14].

Пуанкаре не дал четкого определения, что понимать под качественным различием. В своем докладе на Математическом конгрессе в Риме в 1908 г. он говорит о некотором критерии эквивалентности для нелинейных дифференциальных уравнений, исходя из групп преобразований [15, С.476-477]. Но такой подход сильно сужает класс изучаемых задач, эквивалентность требуется определить при менее ограничительных условиях. Здесь следует вспомнить работу немецкого математики Гельмута Кнезера [16]. Об этой работе говорит и М. Пейксото [17]. У Кнезера критерием эквивалентности является топологическая эквивалентность: динамические системы $Y$ и $X$ топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм, который отображает фазовое пространство $X$ на фазовое пространство $Y$, при этом ориентированные фазовые траектории $X$ переходят в ориентированные фазовые траектории $Y$. К сожалению, эта работа Кнезера не привлекла должного внимания и не оказала того влияния, которое могло бы иметь место при более благоприятных обстоятельствах.

## Понятие грубости (структурной устойчивости) в теории нелинейных колебаний и в теории динамических систем

Еще к Пуанкаре восходит идея о сохранении качественных свойств динамической системы при малых возмущениях - положений равновесия и предельных циклов. Но такая устойчивость имеет локальный характер. Сохранение качественной картины во всем фазовом пространстве представляет совершенно новый вид устойчивости и его актуальность была осознана лишь в 1920-е гг. Сейчас глобальный подход является привычным и почти очевидным, но еще до середины 1950-х гг. это было не так. В 1929 г. в *Comptes Rendue* была опубликована небольшая заметка Андронова «Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний» [18], содержащая основные результаты его аспирантской работы. Значение этой заметки в развитии нелинейной физики трудно переоценить, в ней содержатся основные предпосылки для постановки задачи исследования нелинейных колебаний, хотя сама формулировка сложилась несколько позднее [19, С.40]. Сам Андронов не был чистым математиком, но для решения физических задач он использовал самые последние математические достижения. Показательным примером является доклад Андронова в Московском топологическом кружке в 1931 г. (это было временем становления алгебраической топологии) «Топологические методы в теоретической радиотелеграфии» [20]. Надо отметить огромную роль Московского топологического кружка в развитии топологии в нашей стране и использовании ее методов в самой математике и ее приложениях. Активным участником работы кружка был Понтрягин. Как указывал Л.И. Мандельштам, Пуанкаре в своей качественной теории больше говорит о том, что вообще может быть у дифференциальных уравнений, чем учит исследовать конкретные уравнения [21, С.456]. Последнее было сделано в школе Андронова, которая превратила качественную теорию в мощный метод исследования нелинейных систем. Основное место здесь заняло понятие грубости, в явном виде сформулированное в [18] как требование для устойчивости автоколебаний: в реальных физических системах автоколебания должны сохраняться при достаточно малых изменениях самих систем (физическое требование «грубости» периодических движений, представляющих автоколебания). С физической точки зрения оно было достаточным для понимания, но математически оставалось неудовлетворительным, что препятствовало его превращению в эффективный инструмент исследования нелинейных уравнений. Строго математическая формулировка явилась довольно непростой задачей. Андронов привлек Понтрягина, с которым у него сложились дружеские отношения. В 1937 г. была опубликована их основополагающая работа «Грубые системы» [14] одновременно на русском и французском языках. Андронов и Понтрягин исходят из *грубых систем*, как класса динамических систем, у которых топологическая структура фазовых траекторий не меняется при малых изменениях дифференциальных уравнений.

Рассмотрим динамическую систему, определяемую двумя уравнениями первого порядка с аналитическими на всей фазовой плоскости правыми частями [14]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим наряду с системой 1 измененную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x,y) + p(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x,y) + q(x,y), \end{aligned} \tag{2}$$

где $p(x,y), q(x,y)$ – малые аналитические добавки к правым частям системы (1). Далее Андронов и Понтрягин дают определение грубой системы: система (2) называется грубой в данной области $G$, если для любого $\eta > 0$ можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при произвольных $p(x,y)$ и $q(x,y)$, удовлетворяющих в области $G$ условиям

$$|p(x,y)| < \varepsilon, |q(x,y)| < \varepsilon, |p_x^{'}(x,y)| < \varepsilon,$$
$$|p_y^{'}(x,y)| < \varepsilon, |q_x^{'}(x,y)| < \varepsilon, |q_y^{'}(x,y)| < \varepsilon,$$

существует топологическое (т.е. взаимно однозначное и взаимно непрерывное) отображение области $G$ в себя, при котором: 1) соответствующие друг другу точки находятся на расстоянии меньшем $\eta$; 2) точкам, лежащим на одной и той же траектории системы (1), соответствуют точки, лежащие на одной и той же траектории системы (2) и обратно. В примечании авторы отмечают, что подход Боля [11] к устойчивости динамической системы по отношению к изменению правых частей уравнений не является удовлетворительным, поскольку накладывает исключительно тяжелые требования на исходную систему. Андронов и Понтрягин сформулировали необходимые и достаточные условия грубости системы (2). В грубых системах может быть: 1) лишь конечное число особых точек, состояния равновесия могут быть только узлами, фокусами и седлами; 2) конечное число предельных циклов; 3) не могут иметься сепаратрисы, идущие из седла в седло. Они показали, что на плоскости качественная картина для грубых систем очень проста, имеется лишь конечное число положений равновесия и замкнутых траекторий. Грубые системы образуют всюду плотное множество в пространстве всех динамических систем рассматриваемого класса, они являются типичными. Грубость является важнейшим топологическим инвариантом. Но в работе не были приведены доказательства сделанных утверждений. В определенной степени это было сделано в монографии А.А. Андронова и С.Э. Хайкина «Теория колебаний (без указания третьего автора А.А. Витта), изданная в том же 1937 г. [22]. В 1933 г. А.А. Андронов выдвинул программу исследований динамических систем [21]: как при изменении параметров меняется топологическая структура разбиения фазовой плоскости на интегральные кривые и каковы бифуркационные значения параметров? В школе Андронова на основе понятия грубости эта программа исчерпывающим образом была реализована для двумерных систем, для которых грубость представляет типичное свойство, и поведение таких систем является регулярным.

Значительную роль в исследовании грубых систем сыграл выдающийся американский математик Соломон Лефшец (выходец из России). В 1943 г. Лефшец стал консультантом ВМС и познакомился с другим выходцем из России Николаем Минорским, специалистом в области управления и устойчивости судов, который был привлечен к исследованиям по устойчивости кораблей и полученные результаты он изложил в отчете [23]. Минорский широко использовал результаты, изложенные в монографии Андронова с соавторами [22], но не придал должного значения понятию грубости – центрального понятия в исследованиях нелинейных систем. Минорский привлек внимание Лефшеца к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые стали главным предметом интересов Лефшеца до конца жизни. Лефшец активно пропагандировал на Западе достижения российских математиков. Фундаментальная монография «Теория колебаний» [22] быстро получила признание на Западе, она часто цитировалась, и в 1949 г. в сокращенном виде под редакцией С. Лефшеца она была издана в Принстоне [24]. В этом издании вместо «грубости» был введен в употребление термин «структурная устойчивость» [24, P.183,337-340], который получил широкое распространение, особенно в западной литературе. Различие здесь не только терминологическое, а произошел перенос акцента с характеристики системы на ее свойства. Лефшец осознал важность понятия грубости, но мимо его внимания прошло идейное богатство труда Андронова [22], в переводе было практически опущено введение, остальная часть также была сокращена, а изложение понятия грубости вынесено в приложение. Как указывает Д. Обен, если бы перевод был сделан без купюр, многие, сформулированные позднее, идеи Р. Тома и Д. Рюэля выглядели бы не столь новаторскими [25, P.274]. В 1946 г. Лефшец возглавил исследовательский проект по нелинейным дифференциальным уравнениям в Принстонском университете, финансировавшийся ВМС [26];[27, P.275-276]. К проекту присоединился математик из университета Нотр-Дам в Принстоне Г. Баггис. Как отмечалось, основные работы Андронова и его сотрудников, касающиеся структурно устойчивых систем [18],[14] и др., не содержат доказательств, что затрудняет использование и дальнейшее развитие теории. Баггис в своей работе [28] (1952) восполнил этот недостаток, приведя необходимые доказательства. При этом он ослабил условия Андронова и Понтрягина [14], налагаемые на правые части системы (2): вместо аналитических функций Баггис рассматривает непрерывные функции с непрерывными частными производными.

В группе Лефшеца поначалу исследовали конкретные нелинейные дифференциальные уравнения, мотивированные прикладными задачами. Но постепенно центр интересов сместился от изучения грубости в контексте исследования нелинейных систем в сторону глобальной и амбициозной программы классификации динамических систем [29]. Важное значение здесь приобрела теория особенностей гладких отображений. Теория особенностей является далеко идущим обобщением исследования функций на максимум и минимум [30, C.8]. Эта область выделилась в 1955 г. после работы американского математика Хасслера Уитни [31], и затем теория особенностей превратилась в развитый и богатый результатами раздел современной математики. Уитни поставил задачу отображения $f_0$ открытого подмножества $R^n$ $n$-мерного пространства $E^n$ в $m$-мерное пространство $E^m (f_0 : R^n \to E^m)$ таким образом, чтобы при малом изменении $f_0 \to f$ отображение $f$ обладало более удобными и простыми свойствами. Важное место здесь занимают понятия *общего положения* или *типичности* и *трансверсальности*. Понятие типичности восходит к Пуанкаре. Рассмотрим его более подробно. В своем знаменитом докладе на Амстердамском конгрессе математиков в 1954 г. А.Н. Колмогоров указал: «Для получения отрицательных результатов о несущественном, исключительном характере какого-либо явления мы будем применять только один несколько кустарный прием: если в классе $K$ функций $f(x)$ можно ввести конечное число функционалов

$$F_1(f), F_2(f), \ldots, F_r(f),$$

которые в том или ином смысле естественно считать принимающими, вообще говоря, произвольные значения

$$F_1(f) = C_1, \ldots, F_r(f) = C_r$$

из некоторой области r-мерного пространства точек $C = (C_1, \ldots, C_r)$, то мы будем считать любое явление, которое может иметь место только при $C$ из множества, имеющего $r$-мерную лебеговскую меру нуль, исключительным и подлежащим «пренебрежению» [32, C.320]. Обобщение этого указания привело к понятию свойства общего положения или типичного свойства, означающего в зависимости от контекста пренебрежение «малыми» подмножествами, выдвигая на первый план «большие» подмножества, обладающих тем или иным свойством [33, P.45-46]. Трансверсальность обобщает понятие секущей на многообразия и топологические пространства. Для нашего случая в дифференциальной ситуации два подмногообразия $L$ и $M$ многообразия $N$ *трансверсальны* в точке $x \in L \cap M$, если касательные пространства в этой точке $T_xL$, $T_xM$ порождают $T_xN$. Это означает, что в $N$ можно ввести такие локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности $U$ точки $x$, в которых $L \cap U$ и $M \cap U$ представляются как трансверсальные векторные пространства в $R^n$. Трансверсальность связана с «хорошими» свойствами пересечения [34]. Глубокая разработка понятия трансверсальности применительно к задачам топологии была проведена Рене Томом [35]-[37], что явилось ключевым пунктом в развитой им теории кобордизма [35]. Трансверсальность представляет типичное свойство: для двух произвольных гладких подмногообразий $L$ и $M$ с помощью произвольно малой деформации можно добиться того, чтобы они пересекались трансверсально в любой точке их пересечения. Пусть $P$ и $Q$ – дифференцируемо вложены в $R^3$ (Рис. 1).

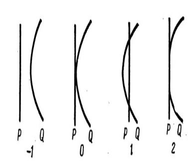


Рис. 1: Демонстрация связи трансверсальности и структурной устойчивости [37, C. 33]. Demonstration of the relationship between transversality and structural stability

Целое число указывает размерность пересечения. При нульмерном и двумерном пересечениях малой деформацией одного из поверхностей можно сделать размерность либо -1, либо +1, а в случае пересечений размерностей -1 и +1 малая деформация не меняет размерностей. Эти интуитивные рассуждения получили строгое обоснование в теореме трансверсальности. Кроме того, при определенных условиях множество трансверсальных отображений является всюду плотным [37, C.33,41]. Из сказанного ясно, что условие трансверсальности имеет важное значение для структурной устойчивости, это особенно актуально для n-мерного случая. Свойства типичности и трансверсальности явились необходимыми элементами в построениях Пейксото. Как Пейксото позднее вспоминал, он много обсуждал с Лефшецем возможность обобщения на n-мерный случай условия Андронова-Понтрягина об отсутствии траекторий, соединяющих седловые точки. Ответ был дан С. Смейлом где-то в конце 1958 г.: устойчивое и неустойчивое многообразия особых точек и замкнутых траекторий должны пересекаться трансверсально [38].

Следующий важный шаг в исследовании грубых систем связан с именем Маурисио Пейксото, основателем бразильской школы теории динамических систем. В 1957-1958 гг. Пейксото находился в Принстоне, где познакомился с Лефшецем [39]. Общение с Лефшецем стимулировало интерес Пейксото к качественной теории дифференциальных уравнений и он познакомился с только что изданной монографией Лефшеца [40], где в десятой главе рассматривается понятие структурной устойчивости. Лефшец основывается на работе Баггиса [28], которая мотивировала Пейксото вплотную заняться структурно устойчивыми системами. В работах Пейксото ясно видно изменение подхода к поставленным задачам вследствие происшедшего сдвига в сторону теории динамических систем. В 1959 г. появилась статья Пейксото [41], в которой проведено обобщение первоначального подхода Андронова и Понтрягина [14]. Пейксото проводит рассмотрение в банаховом пространстве и дает свое определение структурной устойчивости. Главным отличием определения Пейксото от [14] является отказ от требования близости к тождественному гомеоморфизма, под действием которого система при малом возмущении остается эквивалентной исходной системе. Далее Пейксото распространил понятие структурной устойчивости на случай $n$-мерного диска и показал, что структурно устойчивые грубые системы образуют открытые множества. Д.В. Аносов полагает, что причиной, побудившей Пейксото пересмотреть определение структурной устойчивости, послужило то, что на любом гладком замкнутом многообразии $M$ системы, структурно устойчивые по Пейксото, образуют открытое множество, тогда как для структурной устойчивости по Андронову и Понтрягину это справедливо лишь в тех немногих случаях, когда решен вопрос о необходимых и достаточных условиях структурной устойчивости в терминах качественной картины поведения траекторий в фазовом пространстве [13, С.69]. Таким образом, появилось два понятия структурной устойчивости: более ограничительная структурная устойчивость по Андронову и Понтрягину и структурная устойчивость по Пейксото. Долгое время оставалось неясным, являются ли эти два варианта эквивалентными. В конечном итоге на этот вопрос был получен положительный ответ [42, С.132]. В 1958 г. на Эдинбургском конгрессе математиков Лефшец познакомил Пейксото с Понтрягиным, которому Пейксото изложил результаты своей работы [41] (она к тому времени еще не была опубликована) [17, P.608];[43, P.148]. Работа Пейксото [41] не вызвала большого интереса у Понтрягина, в особенности рассмотрение $n$-мерного случая. Хотя сам Понтрягин внес очень важный вклад, теория динамических систем составила не очень длительный период в его научной биографии и его в то время занимали другие вопросы. Да и сами математики, благодаря которым структурная устойчивость обрела вторую жизнь (С. Лефшец, Г. Баггис, Х. Уитни, М. Пейксото, С, Смейл, Д.В. Аносов, Р. Том), не могли еще осознать кардинальные последствия совершающегося прорыва.

В 1962 г. появилась другая работа Пейксото по структурной устойчивости [44]. В частных случаях эти же вопросы были изучены ранее А.Г. Майером [45], В.А. Плиссом [46] и В.И. Арнольдом [47]. На это указывали бразильские математики [17, 48]. Эта работа Пейксото вместе с [42] составляет главную часть его научного наследия. Некоторые неточности в [44] Пейксото исправил в своей следующей статье [49]. В статье [44] Пейксото распространил результаты, полученные в предыдущей работе [41], на двумерные компактные дифференцируемые многообразия $M^2$. Пейксото доказал важную и получившую широкую известность теорему, ныне носящую его имя.

Теорема Пейксото утверждает, что для структурной устойчивости векторного поля на компактном двумерном многообразии $M^2$ необходимо и достаточно, чтобы: 1) имелось конечное число особых точек; 2) $\alpha$ и $\omega$-предельные множества каждой траектории могут быть только особыми точками или замкнутыми орбитами; 3) не имелось траекторий, соединяющих седловые точки; 4) имелось лишь конечное число замкнутых траекторий. Условия 1, 3 и 4 сформулированы в работе Андронова и Понтрягина [14] и частично доказаны в [22]. Условие 2 следует из теории Пуанкаре-Бендиксона, рассматривающей предельное поведение (при $t \to \pm\infty$) траекторий автономной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка [50]. Далее Пейксосто доказал теорему о плотности. Обозначим через $B$ пространство всех векторных полей на $M^2$, через $\sum \subset B$ - множество всех структурно устойчивых векторных полей. Тогда теорема о плотности утверждает: множество $\sum$ открыто и плотно в пространстве B всех систем, определенных на $M^2$. В случае, когда $M^2$ является сферой $S^2$, справедливость теоремы о плотности следует из предшествующей работы Пейксото [41]. Таким образом, на $M^2$ структурно устойчивые системы не только типичны, но любая система может быть аппроксимирована ими, и поведение таких систем полностью определено.

В это же время на первый план выступает фигура Стивена Смейла. Как вспоминает сам Смейл [43], он первый раз встретился с Пейксото где-то в 1958 г. Пейксото познакомил Смейла со своей работой [41], в частности, со структурной устойчивостью на диске $D^2$. Смейл тогда находился на взлете своей научной деятельности. Он был топологом, что обусловило в его работах [51]-[53] новый подход к теории динамических систем. На языке топологии задачи качественной теории часто предстают в наиболее простом виде и открываются новые возможности. По словам самого Смейла, через Понтрягина и Лефшеца в самой концепции структурной устойчивости сидел «дух» топологии, и это было решающим, что привлекло его внимание к динамическим системам [54, P.22]. Смейл провел глубокое обобщение понятия неподвижной гиперболической точки, позволившее прийти к совершенно новому взгляду на теорию динамических систем. Размышления Смейла направились на возможность использования топологических методов для обобщения результатов Пейксото на $n$-мерный случай. Здесь Смейл вплотную подошел к своему главному вкладу в теорию динамических систем. Надо отметить смелость и неординарность шага Смейла, он вступил в неизведанную область, не было известно, существуют ли там вообще какие-либо структурно устойчивые объекты.

В конце 1959 г. Смейл отправился в Рио де Жанейро, где по приглашению бразильских математиков он провел около года в только что основанном Институте чистой и прикладной математики (IMPA) [54], и это был самый плодотворный период в его жизни. Еще с античности культивируется представление, что в главных чертах устройство мира можно объяснить с помощью небольшого числа фундаментальных принципов. В этом же ряду находятся и предпосылки исследований Смейла по многомерным динамическим системам. Идея выглядела очень привлекательной: предполагалось, что представления, развитые для описания двумерных систем, остаются справедливыми и в многомерном случае, существуют структурно устойчивые системы в пространстве многомерных динамических систем ($n \geqslant 3$) [51]. Фактически гипотеза Смейла была попыткой распространить программу Андронова на многомерный случай. Такие системы были введены самим Смейлом (1960) [52] и по предложению Тома они были названы системами Морса-Смейла. В этих системах имеется конечное число особых точек и периодических орбит, почти все траектории (в смысле меры) стремятся к периодическим орбитам. Таким образом, устройство многомерных динамических систем в главном выглядело подобным устройству двумерных систем, они относятся к системам с «простым поведением». Действительность оказалась значительно более сложной и многообразной. В многомерном случае являются типичными более сложно устроенные системы. Смейл с большим энтузиазмом приступил к работе и был весьма удовлетворен полученными результатами но, по его собственному признанию, оказался крайне самонадеян. Если бы он ознакомился с трудами предшественников, он был бы более осторожен. Эйфория Смейла быстро прошла после письма Н. Левинсона из Массачусетского технологического института. Левинсон писал, что имеется целый ряд контрпримеров к его гипотезе [43, 54].

В 1940-1950-х годах английские математики М. Картрайт и Дж. Литтлвуд в серии работ [55]-[59], стимулированных потребностями радиотехники, провели подробное исследование уравнения Ван дер Поля при большом трении и большом периодическом возбуждении. Результаты оказались неожиданными и необычными. Они обнаружили большое разнообразие в поведении решений, некоторые из которых выглядели очень странно. Был установлен интервал значений параметра, когда уравнение имело две системы устойчивых субгармоник, к которым стремилась часть решений. Кроме того, имелось бесконечное множество неустойчивых периодических решений и множество мощности континуума непериодических рекуррентных решений. По словам Картрайт и Литтлвуда, вера в правильность необычных полученных результатов основывалась исключительно на экспериментальных данных Ван дер Поля. Для прояснения ситуации Левинсон рассмотрел более простое для анализа уравнение и показал, что его решения имеют те же особенности поведения, что и в работах Картрайт и Литтлвуда [60]. Левинсон особо отметил, что эти свойства решений сохраняются при малых возмущениях. Смейл понял, что аргументы Левинсона справедливы, а сам он ошибался [43, 54]. Позднее обнаруженные явления были проинтерпретированы как проявление гиперболичности.

Результаты Левинсона Смейлу надо было перевести на привычный ему геометрический язык и это подтолкнуло его к идее «подковы» [61]. Эту конструкцию Смейл представил на Международном симпозиуме по нелинейным колебаниям в Киеве (1961) [53]. Конференция была очень представительной, в ней принимали участие известные ученые (Н.Н. Боголюбов, Р. Беллман, Е.А. Леонтович, М. Картрайт, С. Лефшец, Н. Минорский, В.В. Немыцкий и др.), но мало кто тогда оценил значение этой работы Смейла, что это был один из поворотных пунктов и начиналась новая эпоха. Подкова Смейла явилась демонстрацией сложной динамики в двумерном отображении. В ней присутствует бесконечное множество периодических точек, множество неблуждающих точек образуют канторово множество. Для многомерных систем ключевым понятием оказались гомоклинические структуры, которые для них столь же типичны, как для двумерных систем состояния равновесия и периодические движения. В многомерном случае характерны системы со сложной динамикой. В таких системах структурная устойчивость выступает в новом, совершенно неожиданном качестве. Гомоклинические структуры локально неустойчивы в каждой точке инвариантного множества. Но сама структура в целом в качественном отношении устойчива к малым внешним возмущениям.

Любопытно, как Аносов видит возможный ход мыслей Смейла, который привел его к идее подковы [62]. Смейл не стал подробно изучать работы Левинсона, Картрайт и Литтлвуда. Из них он извлек только то, что в изучаемых системах присутствует сильное трение и большая возбуждающая сила, а траектории остаются в некоторой ограниченной части фазового пространства. Тогда можно представить геометрическую модель, в которой траектории в одном направлении сближаются, а в другом быстро расходятся друг от друга. Если перейти к итерациям отображения, то квадрат превращается в длинный и узкий прямоугольник. Но поскольку траектории не покидают ограниченной области фазового пространства, прямоугольник надо изогнуть, чтобы он остался в этой области. Сохранение основных свойств фазового портрета, на что указывал Левинсон, привело к структурной устойчивости «подковы». Как вспоминает Аносов: “Киевляне издали к началу конференции тезисы ряда докладов в виде отдельных брошюрок (тогда это требовало заметных усилий), причем тезисы иностранцев были переведены на русский язык. И вот, стоя в очереди регистрирующихся участников и заглядывая через плечи вперед, я стал рассматривать стопки этих брошюрок и прочитал название одной из них: С. Смейл. “Структурно устойчивый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек”. В этот момент мир для меня перевернулся, и началась новая жизнь” [62, С.10-11].

Одним из способов выражения на математическом языке локальной неустойчивости является свойство гиперболичности. Наиболее отчетливо свойство гиперболичности проявляется в системах Аносова, которые представляют его наиболее сильный вариант [63, 64]. Понятие гиперболического множества призвано дать адекватное представление о глобальной структуре всей системы и основано на явлениях, которые имеют место в системах Аносова и в подкове Смейла. Гиперболическим множеством $F$ гладкой динамической системы называют компактное множество многообразия $M$, целиком состоящее из траекторий, в окрестности каждой из которых поведение всех соседних траекторий (включая и те, которые и не лежат в $F$), напоминает поведение траекторий возле седла. У систем Аносова все фазовое пространство является гиперболическим множеством.

Системы Морса-Смейла представляют многомерный аналог двумерных динамических систем, для которых характерно простое поведение. Надежда, что в многомерном случае такой тип поведения в целом сохранится, не оправдалась. Такие примеры, как подкова Смейла и гиперболический автоморфизм двумерного тора, противоречили гипотезе о плотности систем Морса-Смейла. И сам Смейл показал, что при размерности больше двух *системы Морса-Смейла нигде не плотны* [61]. Из него следует, что в многомерном случае типичными являются системы со сложной динамикой. Здесь возникают новые проблемы, для случая высших размерностей не удалось найти достаточно универсального свойства, которое подобно структурной устойчивости для двумерного случая, было типично для динамических систем и в то же время в значительной степени определяло их свойства. Исследования пошли по пути изучения отдельных классов систем со сложной динамикой. Сможет ли понятие структурной устойчивости стать одним из конструктивных элементов в многомерных системах, на сегодняшний день этот вопрос остается открытым.

## Заключение

Подведем некоторые итоги. Вместе с эволюцией методов математического описания кардинальным образом менялись взгляды на мир на уровне парадигмы. Образно это выразил Ю.С. Ильяшенко, указав, что исследования динамических систем можно разбить на три периода: период Ньютона – дано дифференциальное уравнение, нужно его решить; период Пуанкаре - дано дифференциальное уравнение, нужно описать свойства его решений, не решая уравнение, а лишь используя свойства правой части; период Андронова – не дано никакого дифференциального уравнения, нужно описать свойства его решений [65, С.13]. Именно структурная устойчивость и свойство типичности дают такую возможность. В известной работе Д. Рюэля и Ф. Такенса «О природе турбулентности» [66], где введено понятие странного аттрактора, без рассмотрения в явном виде уравнений Навье-Стокса изучаются свойства его решений. Они рассмотрели на бесконечномерном векторном пространстве $H$ эволюцию поля скоростей, задаваемой этими уравнениями

$$\frac{dv}{dt} = X_\mu(v) \tag{3}$$

где $X_\mu$ - векторное поле на $H$. В основу положены понятия типичности и структурной устойчивости. Квазипериодические движения, из которых исходит сценарий Ландау-Хопфа, при $n > 2$ не являются типичными. Аттракторы, состоящие из неподвижных точек и замкнутых траекторий, не образуют плотного множества. С ростом параметра $\mu$ система становится структурно неустойчивой, имеет место сложная структура траекторий, возникают странные аттракторы.

Как всякое фундаментальное понятие, структурная устойчивость вышла далеко за рамки своего первоначального предмета. Сошлемся на слова В.И. Арнольда: «Идея грубости (структурной устойчивости) у Андронова выступает как общефизическая и общематематическая. Изучаемые системы не обязательно должны быть динамическим системами, а классификация – не обязательно топологической. В терминологии Андронова классификация определяется тем, “какие вопросы мы задаем о системе”, а требование структурной устойчивости модели запрещает задавать слишком точные вопросы о качественном поведении системы в тех случаях, когда малое изменение модели меняет ответы на эти вопросы” [67, С.237]. В математике областями, где понятие структурной устойчивости обрело «права гражданства», стали алгебраическая геометрия, дифференциальная топология и др. (см., например, [1] и указанную там литературу). Структурная устойчивость стала одним из главных понятий теории динамических систем, и она легла в основу попыток решения грандиозной задачи – провести классификацию динамических систем. Структурная устойчивость существенным образом дополнила понятие корректности постановки задач математической физики. Корректно поставленная задача наряду с условиями существования и единственности решений и их непрерывной зависимости от начальных и граничных условий, сформулированных Ж. Адамаром и развитых далее А.Н. Тихоновым [68]-[70], должна также включать условия структурной устойчивости. Более того, в случае уравнений в частных производных структурная устойчивость практически эквивалентна корректности задачи [1, С.32].

Теория особенностей и теория бифуркация явились источником теории катастроф, математические основы которой были заложены Рене Томом [71, 72]. Целью теории катастроф является описание возникновения дискретных структур из гладких, непрерывных систем. Теория катастроф в начале 1970-х гг. стала очень популярной теорией, претендующей революционизировать всю науку. Здесь понятия структурной устойчивости и типичности приобрели центральное значение и у Тома эти понятия легли в основу научной программы и развиваемой им философии [31, 68, 73]. Ожидания и надежды в теории катастроф оказались сильно преувеличенными, но она заняла свое место в современной математике. Выше говорилось, что в конце 1950-х гг. изучение структурной устойчивости отошло от первоначальной мотивации прикладными проблемами и сместилось в сторону чистой математики. В конце 1960-х гг. маятник качнулся в обратную сторону, структурную устойчивость стали рассматривать и в контексте прикладных задач. Инициатором опять стал Том, применив топологические методы к проблемам биологии. Результаты его исследований вошли в вызвавшую широкие дискуссии книгу «Структурная устойчивость и морфогенез» [1], изданная в 1972 г.

Структурная устойчивость приобрела общенаучное значение и стала проникать и в гуманитарные области. В качестве примера можно указать любопытный труд «Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте» [74].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Том Р. Структурная устойчивость и морфогенез. М. : Логос, 2002. 280 с.

2. Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987. 272 с.

3. Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: РХД, 2000. 400 с.

4. Лаплас П.С. Опыт философии теории вероятностей. М., 1908. 206 с.

5. Молодший В.Н. О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX в. // Истор.-матем. исслед. 1978. Вып. 23. С. 32-55.

6. Liouville J. Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati // J. Math. Pures et Appl. 1841. P. 1-13, 36.

7. Bour J. Sur l'integration des équations différentielles de la Mécanique Analytic // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. P. 185-200.

8. Liouville J. Note à l'occasion du memoire précident de M. Edmond Bour // J. Math. Pure et Appl. 1855. V. 20. P. 201-202.

9. Poincaré H. Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle // J. Math. Pure et Appl. Sér. 3. 1881. V. 7. P. 375-422; 1882. V. 8. P. 251-296; Sér. 4. 1885. V. 1. P. 167-244; 1886. V. 2. P. 151-217.

10. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 392 с.

11. Bohl P. Über Differentialungleichugen // J. für reine und angewandte Math. 1913. Bd. 144. S. 284-313.

12. Мышкис А.Д., Рабинович И.М. Математик Пирс Боль. Рига: Изд-во «Зинатне», 1965. 100 с.

13. Аносов Д.В. Грубые системы // Труды МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 59-93.

14. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247-252.

15. Пуанкаре А. Будущее математики// Вестн. опыт. физики и элем. математики. 1908. Вып. № 474. С. 405-410; № 475-476. С. 425-429; № 477. С. 473-483.

16. Kneser H. Reguläre Karvenscharen auf den Ringflächen // Math. Ann. 1924. V. 91. S. 135-154.

17. Peixoto M. M. Acceptance speech for the TWAS 1986 award in mathematics // The future of science in China and the third world. Singapore: World Sci., 1989. P. 600-614.

18. Andronov A.A. Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations autoentretenues // Comp. Rend. 1929. T. 189. N 15. P. 559-561.

19. Бойко Е.С. Александр Александрович Андронов. М.: Наука, 1991. 256 с.

20. Немыцкий В.В. Московский топологический кружок за 10 лет // УМН. 1936. Вып. 2. С. 279-285.

21. Андронов А.А. Математические проблемы теории автоколебаний // I Всесоюзн. конф. по колебаниям. Т. I. М.: Гостехтеориздат, 1933. С. 32-71.

22. Андронов А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.-Л.: ОНТИ, 1937. 519 с.

23. Minorsky N. Introduction to Nonlinear Mechanics. Ann-Arbor: J.W. Edvards, 1958. 476 p.

24. Andronov A.A., Khaikin S.E. Theory of Oscillations. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1949. 358 p.

25. Aubin D. Cultural History of Catastrophe and Chaos. Princeton, NJ: Université de Princeton, Département d'Histoire, 1998. 782 p.

26. Lefschetz S. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Oscillations. US Office of Naval Research (August 15, 1946 – Sept. 30, 1959). Final Report.

27. Griffiths P., Spencer D., Whitehead G. Solomon Lefschetz. A biographical memoir . Washington D.C.: National Acad. Sci., 1992. 313 p.

28. De Baggis G.F. Dynamical systems with stable structure // Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations. Ed. Lefschetz S. 1952. V. 2. P. 37-59.

29. Dahan Dalmedico A. La renaissance des systèmes dynamiques aux Etats-Unis après la deuxieme guerre mondiale // Suppl. Rendiconti dei circolo math. Palermo. 1994. Ser. II. V. 34. P. 133-166.

30. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.

31. Whiney H. Singularities of mappings of Euclidean spaces // Ann. Math. 1955. V. 62. P. 374-410.

32. Колмогоров А.Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // Proc. Intern. Congr. Math. 1954. Amsterdam. V. 1. P. 315-333. / То же в кн.: А.Н.Колмогоров. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 316-332.

33. Hunt B., Kaloshin V. Prevalence // Handbook of Dynamical Systems. V. 3. Ed. By H. Broer, F. Takens and B. Hasselblatt. Amsterdam: Elseiver, 2010. P. 43-88.

34. Аносов Д.В. Трансверсальность // Мат. энциклопед. Т. 5. М.: Сов. Энциклопедия, 1985. С. 415-416.

35. Thom R. Quelques proprieties globales des varites differentiables // Comm. Math. Helv. 1954. V. 28. P. 17-86.

36. Thom R. Un lemme sur les applications differentiables // Boletin de la Sociedad Math. Mexicana. 1956. V. 1. Ser. 2. P. 59-71.

37. Том Р., Левин Г. Особенности дифференцируемых отображений // Особенности дифференцируемых отображений. Под ред. В.И. Арнольда. М.: Мир, 1968. С. 8-101.

38. Peixoto M.M. Some Recollections of the Early Work of Steve Smale // From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest. Ed. by M.W. Hirsh, J.E. Marsden, M. Shub. N.Y.: Springer-Verlag, 1993. P. 73-75.

39. Sotomayor J. Introduction: A few words about Mauricio M. Peixoto on his 80th birthday // II. S. Lefschetz, ed. Princeton, N.Y.: Princeton Univ. Press, 1952. p. 37-59; Comp. Appl. Math. 2001. V. 20. N 1-2. P. 3-9.

40. Lefschetz S. Differential equations: geometric theory. N.Y.- L.: Interscience Publshers, 1957. 400 p.

41. Peixoto M. On structural stability // Ann. Math. 1959. V. 69. N 1. P. 199-222.

42. Аносов Д.В. О развитии теории динамических систем за последнюю четверть века // Студенческие чтения МК НМУ. Вып. 1. М.: МЦНМО, 2000. С. 74-192.

43. Smale S. On how I can get started in dynamical systems // Smale S. The mathematics of time. N.Y.: Springer Verlag, 1980. P. 147-151.

44. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. 1962. V. 1. N 2. P. 101-120.

45. Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Учен. записки Горьков. ун-та. 1939. Вып. 12. С. 215-229.

46. Плисс В.А. О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе // Вест. ЛГУ. 1960. № 13. Вып. 3. С. 15-23.

47. Арнольд В.И. Малые знаменатели. I. Отображение окружности на саму себя // Изв. АН СССР. Сер. Математика. 1961. Т. 25. № 1. С. 21-86.

48. Палис Ж.., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. М.: Мир, 1986. 301 с.

49. Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds – a further remarks // Topology. 1963. V. 2. N 2. P. 179-180.

50. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. 552 с.

51. Smale S. On gradient dynamical systems // Ann. Math. 1961. V. 74. P. 199-206.

52. Smale S. A structurally stable differential homomorphysm with an infinite number of periodic points // Труды Межд. симпоз. по нелин. колебаниям. Киев 1961. Киев: АН УССР, 1963. С. 365-366.

53. Smale S. Structurally stable systems are not dense // Am. J. Math. 1966. V. 73. P. 747-817 / Рус. пер. в сб.: Математика. 1967. Т. 11. № 4. С. 107-112.

54. Smale S. Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio // Chaos Avant-Garde. Singapore: World Sci., 2000. P. 7-22.

55. Cartwright M., Littlewood J.E. On non-linear differential equations of the second order: I. The equation $y - k(1-y^2)y + y = b\lambda k cos(\lambda t + \alpha)$, k large // J. London Math. Soc. 1945. V. 20. Part 3. N 79. P. 180-189.

56. Cartwright M., Littlewood J.E. On non-linear differential equations of the second order: II. The equation $y + kf(y,y) + g(y,k) = p(t) = p_1(t) + kp_2(t); k > 0, f(y) \geqslant 1$ // Ann. Math. 1947. V. 48. N 2. P. 472-494; 1949. V. 50. P. 504-505.

57. Littlewood J.E. On non-linear differential equations of the second order: III. The equation $y - k(1-y^2)y + y = b\mu k cos(\mu t + \alpha)$ for large k, and its generalization // Acta Math. 1957. V. 97. N 3-4. P. 267-308.

58. Littlwood J.E. On the non-linear differential equations of the second order: IV. The general equation $y + kf(y)y + g(y) = bkp(\varphi), \varphi = t + \alpha$// Acta Math. 1957. V. 98. N 1-2. P. 1-110.

59. Littlwood J.E. On the number of stable periods of a differential equation of the Van der Pol type, JRE Trans. Circuit Theory. 1960 V. 7. N 4. P. 535-542.

60. Levinson N. A second order differential equation with singular solutions // Ann. Math. 1949. V. 50. N 1. P. 126-153.

61. Smale S. Structurally stable systems are not dense // Am. J. Math. 1966. V. 73. P. 747-817.

62. Аносов Д.В. Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция // Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1-18.

63. Аносов Д.В. Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 4. С. 707-709.

64. Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН. М.: Наука, 1967. С. 3-209.

65. Ильяшенко Ю.С. Аттракторы динамических систем и философия общего положения // Матем. просв. 2008. Вып. 12. С. 13-22.

66. Ruelle D., Takens F. On the Nature of Turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167-192 / Рус. пер. в кн.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 117-151.

67. Арнольд В.И. Теория катастроф // Совр. проблемы математики. Фунд. направления. Т. 5. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 219-277

68. Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations. New Haven, 1923. 316 p.

69. Mira C. Some historical aspects of nonlinear dynamics: possible trends for the future // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1997. V. 7. N 9. P. 2145-2173.

70. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР. 1943. Т. 39. № 5. С. 195-198.

71. Thom R. Topological models in biology // Topology. 1969. V. 8. N 3. P. 313-335.

72. Thom R. Catastrophe theory: Its present state and future perspectives // Dynamical systems. Berlin: Springer-Verlag, 1974. P. 366-372.

73. Aubin D. From catastrophe to chaos: the modelling practices of applied topologists // Changing images of math. Ed. by U. Bottazzini and A. Dahan Dalmedico. L.-N.Y.: Routledge, 2001. P. 255-279.

74. Алескеров Ф.Т. и др. Влияние и структурная устойчивость в российском парламенте (1905-1917 и 1993-2005 гг.). М.: Физматлит, 2007. 309 с.

## REFERENCES

1. Thom, R. 1972, *Stabilité structurelle et morphogenèse*, W.A. Bendjamin, Paris, 288 p.

2. Galileo, Galilei. 2017, *Il Saggiatore*, Independent Publishing Platform, Rome, 270 p.

3. Arnold, V.I. 2000, *Geometric methods in the theory of ordinary differential equations*, RHD, Izhevsk, 400 p.

4. Laplace, P.S. 1902, *A Philosophical Essay on Probabilities*, J. Wiley, N.Y., 230 p.

5. Molodshiy, V.N. 1978, "A.-L. Cauchy and the revolution in the mathematical analysis of the first quarter of the 19th century", *Histor.Mat. Researches*, Issue 23, pp. 32-55.

6. Liouville, J. 1841,"Remarques nouvelles sur l'équation de Riccat", *J. Math. Pures et Appl.*, Vol. 36, pp. 1-13.

7. Bour, J. 1855, "Sur l'integration des équations différentielles de la Mécanique Analytic", *J. Math. Pure et Appl.*, Vol. 20, pp. 185-200.

8. Liouville, J. 1855, "Note à l'occasion du memoire précident de M. Edmond Bour", *J. Math. Pure et Appl.*, Vol. 20, pp. 201-202.

9. Poincaré, H. 1881; 1882; 1885; 1886, "Memoire sur les courbes définies par une équations differentielle", *J. Math. Pures et Appl.*, Sér. 3, Vol. 7, pp. 375-422; Vol. 8, pp. 251-296; Sér. 4, Vol. 1, pp. 167-244; Vol. 2, pp. 151-217.

10. Poincaré, H. 1947, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, GITTL, Moscow, 392 p. (in Russian).

11. Bohl, P. 1913, "Über Differentialungleichugen", *J. für reine und angewandte Math.* , Bd. 144, s. 284-313.

12. Myshkis, A.D., Rabinovich, I.M. 1965, *Mathematician Pierce Bohl*, Zinatne Publishing House, Riga, 100 p. (in Russian).

13. Anosov, D.V., 1985, "Rough systems", *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute of the USSR*, Vol. 169, pp. 59-93 (in Russian).

14. Andronov, A.A., Pontryagin, L.S. 1937, "Systèmes grossiers ", *Comp. Rend. de l'Acad. Sci. de URSS*, Vol. 14, P. 247-250.

15. Poincaré , H. 1908, "L'avenir des mathématiques", *Bull. des Sci. Math.*, 2e sér., Vol. 32, part I, pp. 168-190.

16. Kneser, H., 1924, "Reguläre Karvenscharen auf den Ringflächen", *Math. Ann.*, Vol. 91, S. 135-154.

17. Peixoto, M. M. 1989, "Acceptance speech for the TWAS 1986 award in mathematics", *The future of science in China and the third world*, World Sci., Singapore , pp. 600-614.

18. Andronov, A.A. 1929, "Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenues", *Comp. Rend.*, Vol. 189, Iss.15, pp. 559-561.

19. Boyko, E.S. 1991, *Alexander Alexandrovich Andronov*, Nauka, Moscow, 256 p. (in Russian).

20. Nemytsky, V.V. 1936, "Moscow Topological Circle for 10 years", *Russian Math. Survey*, Issue 2, pp. 279-285 (in Russian).

21. Andronov, A.A. 1956, "Mathematical problems in self-oscillation theory", *Collected Works*, Acad. Sci. USSR, Moscow, pp. 32-71 (in Russian).

22. Andronov, A.A., Khaikin, S.E. 1937, *Theory of oscillations*, ONTI, Moscow-Leningrad, 519 p. (in Russian).

23. Minorsky, N. 1958, *Introduction to Nonlinear Mechanics*, J.W. Edvards, Ann-Arbor, 476 p.

24. Andronov, A.A., Khaikin, S.E. 1949, *Theory of Oscillations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 358 p.

25. Aubin, D. 1998, *Cultural History of Catastrophe and Chaos*, Université de Princeton, Département d'Histoire, 782 p.

26. Lefschetz, S. 1959, *Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Oscillations*, US Office of Naval Research (August 15, 1946 – Sept. 30, 1959), Final Report.

27. Griffiths, P., Spencer, D., Whitehead, G. 1992, *Solomon Lefschetz. A biographical memoir*, National Acad. Sci., Washington D.C., 313 p.

28. De Baggis, G.F. 1952, "Dynamical systems with stable structure", *Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations, Ed. Lefschetz S.*, Vol. 2, pp. 37-59.

29. Dahan Dalmedico, A. 1994, "La renaissance des systèmes dynamiques aux Etats-Unis après la deuxieme guerre mondiale", *Suppl. Rendiconti dei circolo math. Palermo*, Ser. II, Vol. 34, pp. 133-166.

30. Arnold, V.I. 1990, *Catastrophe theory*, Nauka, Moscow, 128 p. (in Russian).

31. Whiney, H. 1955, "Singularities of mappings of Euclidean spaces", *Ann. Math.*, Vol. 62, pp. 374-410.

32. Kolmogorov, A.N. 1954, "The general theory of dynamical systems and classical mechanics", *Proc. Intern. Congr. Math. Amsterdam*, Vol. 1, pp. 315-333.

33. Hunt, B., Kaloshin, V. 2010, "Prevalence", *Handbook of Dynamical Systems. Vol. 3. Ed. By H. Broer, F. Takens and B. Hasselblatt*, Elseiver, Amsterdam, pp. 43-88.

34. Anosov, D.V. 1985, "Transversality", *Math. encyclopedia*, Vol. 5, Sov. Encyclopedia, Moscow, pp. 415-416 (in Russian).

35. Thom, R. 1954, "Quelques proprieties globales des varites differentiables", *Comm. Math. Helv.*, Vol. 28, pp. 17-86.

36. Thom, R. 1956, "Un lemme sur les applications differentiables", *Boletin de la Sociedad Math. Mexicana*, Vol. 1, Ser. 2, pp. 59-71.

37. Levine, G. 1971, "Singularities of differentiable mappings", *Lecture notes of math.*, Vol. 192, pp. 1-89.

38. Peixoto, M.M. 1993, "Some Recollections of the Early Work of Steve Smale", *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest. Ed. by M.W. Hirsh, J.E. Marsden, M. Shub*, Springer-Verlag, N.Y., pp. 73-75.

39. Sotomayor, J. 1952, "Introduction: A few words about Mauricio M. Peixoto on his 80th birthday II. S. Lefschetz, ed.", Princeton Univ. Press, Princeton, N.Y., pp. 37-59.

40. Lefschetz, S. 1957, *Differential equations: geometric theory*, Interscience Publshers, N.Y., 400 p.

41. Peixoto, M. 1959, "On structural stability", *Ann. Math.*, Vol. 69, No 1, pp. 199-222.

42. Anosov, D.V. 2000, "On the development of the theory of dynamical systems over the past quarter century", *Student Readings of MK NMU. V. 1.*, MCCNMO, Moscow, pp. 74-192 (in Russian).

43. Smale, S. 1980, "On how I can get started in dynamical systems", *Smale S. The mathematics of time*, Springer Verlag, N.Y., pp. 147-151.

44. Peixoto, M. 1962, "Structural stability on two-dimensional manifolds", *Topology*, Vol. 1, No 2, pp. 101-120.

45. Mayer, A.G. 1939, "Rough transformation of a circle into a circle", *Sci. notes of Gorky State Univ.*, Issue 12, pp. 215-229 (in Russian).

46. Pliss, V.A. 1960, "On the roughness of differential equations given on a torus", *Bull. of Leningrad State Univ.*, Vol. 13, Issue. 3, pp. 15-23 (in Russian).

47. Arnold, V.I. 1961, "Small denominators. I. The mapping of a circle onto itself", *Proc. of the USSR Acad. of Sci. Ser. Math.*, Vol. 25. No. 1. pp 21-86 (in Russian).

48. Palis, J., Di Melo, V. 1998, *Geometric theory of dynamical systems*, University of Beijing, Beijing, 198 p.

49. Peixoto, M. 1963, "Structural stability on two-dimensional manifolds – a further remarks", *Topology*, Vol. 2, No 2, pp. 179-180.

50. Nemytskii, V.V., Stepanov, V.V. 1960, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 523 p.

51. Smale, S. 1961, "On gradient dynamical systems", *Ann. Math.*, Vol. 74, pp. 199-206.

52. Smale, S. 1963, "A structurally stable differential homomorphysm with an infinite number of periodic points", *Proc. Int. Congress on non-linear oscillations in Kiev, 1961*, Ukranian Acad. Sci., Kiev, pp. 365-366.

53. Smale, S. 1966, "Structurally stable systems are not dense", *Am. J. Math.*, Vol. 73, pp. 747-817.

54. Smale, S. 2000, "Finding a Horseshoe on the Beaches of Rio", *Chaos Avant-Garde*, World Sci., Singapore, pp. 7-22.

55. Cartwright, M., Littlewood, J.E. 1945, "On non-linear differential equations of the second order: I. The equation $y - k(1 - y^2)y + y = b\lambda kcos(\lambda t + \alpha)$, k large", *J. London Math. Soc.*, Vol. 20, Part 3, No 79, pp. 180-189.

56. Cartwright, M., Littlewood, J.E. 1947;1949, "On non-linear differential equations of the second order: II. The equation $y + kf(y, y) + g(y, k) = p(t) = p_1(t) + kp_2(t); k > 0, f(y) \geqslant 1$", *Ann. Math.*, Vol. 48. No 2. P. 472-494; Vol. 50, pp. 504-505.

57. Littlewood, J.E. 1957, "On non-linear differential equations of the second order: III. The equation $y - k(1 - y^2)y + y = b\lambda kcos(\lambda t + \alpha)$, for large $k$, and its generalization", *Acta Math.*, Vol. 97, No 3-4, pp. 267-308.

58. Littlwood, J.E. 1957, "On the non-linear differential equations of the second order: IV. The general equation $y + kf(y)y + g(y) = bkp(\varphi), \varphi = t + \alpha$", *Acta Math.*, Vol. 98, No 1-2, pp. 1-110.

59. Littlwood, J.E. 1960, "On the number of stable periods of a differential equation of the Van der Pol type", *JRE Trans. Circuit Theory*, Vol. 7, No 4, pp. 535-542.

60. Levinson, N. 1949, "A second order differential equation with singular solutions", *Ann. Math.*, Vol. 50, No 1, pp. 126-153.

61. Smale, S. 1966, "Structurally stable systems are not dense", *Am. J. Math.*, Vol. 73, pp. 747-817.

62. Anosov, D.V. 2006, "Dynamical systems in the 60s: hyperbolic revolution", *Mathematical events of the twentieth century*, Springer, Berlin, pp. 1-18.

63. Anosov, D.V. 1962, "Coarseness of geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature *Rep. of Acad. Sci. USSR*, Vol. 145, № 4, pp. 707-709.

64. Anosov, D.V. 1967, "Geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative curvature", *Proceedings of MIAN*, Nauka, Moscow, pp. 3-209.

65. Ilyashenko, Yu.S. 2006, "Attractors of dynamical systems and philosophy of generic position", *Images de Mathematique*, CNRS, France, p. 58–63.

66. Ruelle, D., Takens, F. 1971, "On the Nature of Turbulence", *Comm. Math. Phys.*, Vol. 20, pp. 167-192.

67. Arnold, V.I.1986, "Catastrophe Theory", *Modern problems of mathematics. Fundamental directions. V. 5.*, VINITI, Moscow, pp. 219-277 (in Russian).

68. Hadamard, J. 1923, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations*, New Haven, 316 p.

69. Mira, C. 1997, "Some historical aspects of nonlinear dynamics: possible trends for the future", *Int. J. Bifurcation and Chaos*, Vol. 7, No 9, pp. 2145-2173.

70. Tikhonov, A.N. 1943, "On the stability of inverse problems“, *Rep. of Acad. Sci. USSR*, Vol. 39, No. 5, pp. 195-198 (in Russian).

71. Thom, R. 1969, ”Topological models in biology“, *Topology*, Vol. 8, No 3, pp. 313-335.

72. Thom, R. 1974, ”Catastrophe theory: Its present state and future perspectives“, *Dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 366-372.

73. Aubin D. 2001, ”From catastrophe to chaos: the modelling practices of applied topologists“, *Changing images of math. Ed. by U. Bottazzini and A. Dahan Dalmedico*, Routledge, N.Y., pp. 255-279.

74. Aleskerov, F.T. et al. 2007, *Influence and structural stability in the Russian parliament (1905-1917 and 1993-2005)*, Fizmatlit, Moscow, 309 p. (in Russian).