

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 22. Выпуск 2.

УДК 533.9; 537.87

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-402-416

Компьютерное моделирование возбуждения электромагнитных колебаний открытого плазменного резонатора

Ю. В. Бобылев, Т. Г. Мещерякова, В. А. Панин

Бобылев Юрий Владимирович — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: bobylev.yu@mail.ru

Мещерякова Татьяна Геннадьевна — Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: tatyanka.parshkova@mail.ru

Панин Владимир Алексеевич — доктор физико-математических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: panin@tspu.tula.ru

Аннотация

При расчете СВЧ-усилителей и генераторов, основанных на излучении сильноточных релятивистских электронных пучков в ограниченной плазме, приходится сталкиваться с рядом трудностей, одна из которых состоит в правильной постановке условий излучения. Поскольку универсального алгоритма, позволяющего преодолеть эти трудности не существует, приходится использовать различные упрощающие предположения и соответствующие им модели. Например, при расчетах плазменных генераторов обычно предполагалось, что ширина спектра генерируемых колебаний невелика, а центральная частота соответствует частоте точного черенковского резонанса. Однако данные предположения оправдались только для пучков с токами меньшими предельного вакуумного тока. Именно для таких пучков, используя метод медленно-меняющиеся амплитуд и вводя постоянный коэффициент отражения плазменной волны от излучающего рупора, удалось создать нестационарную теорию плазменного СВЧ-генератора. Однако возможность применения такого подхода сильно ограничена, т. к. в нем не используется строгая форма условий излучения. Обусловлено это тем, что известные граничные условия излучения разрабатывались для описания лишь установившихся колебательных процессов. В настоящее время существуют различные варианты обобщения данных граничных условий на нестационарный случай, но все они не лишены тех или иных недостатков. Одним из наиболее удачных вариантов граничных условий излучения для полной нестационарной системы Максвелла — Власова является, с нашей точки зрения, нестационарный аналог парциальных условий излучения. Однако практическая реализация этих условий также сталкивается с серьезными математическими трудностями. Вопрос о возможности и эффективности применения данных условий излучения применительно к конкретной электродинамической системе и рассматривается в настоящей работе.

Ключевые слова: СВЧ-плазменная электроника, нестационарные граничные условия излучения.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Ю. В. Бобылев, Т. Г. Мещерякова, В. А. Панин. Компьютерное моделирование возбуждения электромагнитных колебаний открытого плазменного резонатора // Чебышевский сборник, 2021, т. 22, вып. 2, с. 402–416.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 22. No. 2.

UDC 533.9; 537.87

DOI 10.22405/2226-8383-2021-22-2-402-416

Computer simulation of the stimulation of electromagnetic vibrations of an open plasma resonator

Yu. V. Bobylev, T. G. Meshcheryakova, V. A. Panin

Bobylev Yuriy Vladimirovich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: bobylev.yu@mail.ru

Meshcheryakova Tatiana Gennadyevna — Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-tatyanka.parshkova@mail.ru

Panin Vladimir Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: panin@tspu.tula.ru

Abstract

In calculating microwaves - amplifiers and generators based on the emission of highly relativistic electronic beams in limited plasma, you have to face a number of difficulties, one of which is the correct setting of radiation conditions. Since there is no one-size-fits-all algorithm to overcome these challenges, you have to use a variety of simplistic assumptions and corresponding models. For example, plasma generators typically assumed that the width of the spectrum of vibrations generated was small and the central frequency corresponded to the frequency of accurate Cherenkov resonance. However, these assumptions were justified only for beams with currents of smaller maximum vacuum current. It was for such beams, using the method slowly - changing amplitude and introducing a constant ratio of plasma wave reflection from the radiating mouthpiece, it was possible to create a non-stationary theory of plasma microwave - a generator. However, the possibility of applying this approach is very limited, as it does not use a strict form of radiation conditions. This is due to the fact that known boundary conditions of radiation were developed to describe only established vibrational processes. Currently, there are various options for generalizing these boundary conditions for a non-stationary case, but all of them are not without certain shortcomings. One of the most successful variants of the radiation boundary conditions for the complete non-stationary system of Maxwell - Vlasova is, in our view, the unsteady analogue of the partial radiation conditions. However, the practical implementation of these conditions also faces serious mathematical difficulties. The question of the feasibility and effectiveness of these radiation conditions in relation to a specific electrodynamic system is being considered in this paper.

Keywords: microwave plasma electronics, non-stationary border radiation conditions.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

Yu. V. Bobylev, T. G. Meshcheryakova, V. A. Panin, 2021, "Computer simulation of the stimulation of electromagnetic vibrations of an open plasma resonator", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 22, no. 2, pp. 402–416.

Введение

Релятивистская плазменная СВЧ – электроника является относительно молодой областью физики. Её начало было положено в исследованиях пучковой неустойчивости в плазме, которая заключается в аномально сильном взаимодействии быстрого электронного пучка с плотной плазмой, в результате чего пучок будет весьма сильно тормозиться в плазме, возбуждая в ней плазменные колебания [1]. Последующие годы после теоретического предсказания явления пучково–плазменной неустойчивости, были посвящены как дальнейшему развитию теории, так и практической разработке приборов — усилителей и генераторов, принципы работы которых были основаны на использовании данной неустойчивости. При этом оказалось, что функционирование данных приборов можно организовать в области достаточно высоких частот, постоянное же увеличение мощности используемых электронных пучков, а также степени их релятивизма, и стимулировало появление релятивистской плазменной СВЧ–электроники.

Нужно отметить, что устройства, использующие релятивистские электронные пучки (усилители и генераторы) обладают рядом преимуществ в сравнении с нерелятивистскими. Однако продвижение в область сильнооточных пучков оказалось связано со значительными трудностями различного характера. В частности эти трудности были связаны с созданием катодов, способных обеспечивать формирование стабильных электронных пучков [2]–[4], а также с учётом влияния конфигурации магнитного поля на длительность СВЧ-импульсов [5]–[7]. Помимо данных трудностей в плазменной СВЧ–электронике, как в теории, так и в эксперименте, приходилось сталкиваться также и с другими проблемами, в преодолении которых в последние десятилетия был достигнут существенный прогресс.

Однако, несмотря на значительные успехи, проектирование и расчёт СВЧ–усилителей и генераторов, основанных на излучении сильнооточных релятивистских электронных пучков в ограниченной плазме, остаётся весьма сложной задачей. При этом одной из основных проблем является правильная постановка условий излучения. Аналогичная трудность естественно возникает и в соответствующих задачах релятивистской вакуумной СВЧ–электроники, но в случае плазменных систем имеется ряд усугубляющих факторов. Во-первых, из-за специфического линейного закона дисперсии возбуждаемых пучком плазменных волн, не представляется возможным получение какой-либо предварительной информации о центральной частоте и ширине спектра излучения. Во-вторых, возможность плавной перестройки рабочей частоты плазменных СВЧ–излучателей и возможность получения в них запредельно низких частот, требуют особой аккуратности при моделировании излучающего устройства плазменной системы. В-третьих, наличие границ плазмы, безусловно, только ещё осложняет ситуацию. К этому следует добавить общую для всех задач сильнооточной электроники проблему, связанную с импульсностью электронного пучка [8], [9].

Несмотря на перечисленные трудности, расчёты плазменных СВЧ–усилителей и генераторов проводятся уже продолжительное время. Так при расчётах усилителей исходят из предположений о стационарности инжектируемого электронного пучка, стационарности подаваемого на вход усилителя сигнала и идеальной согласованности электродинамической системы усилителя с устройством для вывода излучения [9]. Понятно, что при этом совершенно не учитывается импульсный характер процесса и остаётся в стороне вопрос о возможности хорошего согласования усилителя с излучающим устройством (рупором). Несмотря на данные недостатки, проведённые исследования плазменных усилителей способствовали существенно прогрессу в понимании физики плазменно–пучкового взаимодействия.

При расчётах плазменных генераторов предполагалось, что ширина спектра генерируемых колебаний невелика, а центральная частота соответствует частоте точного черенковского резонанса. Предположения оправдались только для пучков с токами меньшими предельного вакуумного тока. Именно для таких пучков, используя метод медленно-меняющиеся амплитуд и вводя постоянный коэффициент отражения плазменной волны от излучающего рупора,

удалось создать нестационарную теорию плазменного СВЧ-генератора [8]. Аналогичный подход обычно используется и в вакуумной СВЧ-электронике, однако возможности его применения сильно ограничены, поскольку в нём не используется строгая форма условий излучения. Общие принципы излучения в системах с нелокальной границей достаточно подробно рассмотрены, например, в [10], но полученные результаты относятся лишь к случаю установившихся колебаний (подробнее см. далее).

Нужно отметить, что при решении подобных стационарных задач в настоящее время для расчёта нерегулярных волноведущих систем, в частности, систем с локальными неоднородностями в качестве эффективного численного алгоритма широко используется метод конечных элементов [11]. Высокая популярность этого метода объясняется простотой его физической интерпретации. Этот метод основан на локальной аппроксимации решения кусочно-полиномиальными функциями. Исходная область разбивается на подобласти стандартного вида, в качестве которых выступают треугольники или четырёхугольники. При этом на расположение элементов при разбиении области не накладываются ограничения, что позволяет применять метод конечных элементов для широкого круга областей без использования глобальной фиксированной системы координат.

В случае нестационарных колебательных процессов одним из удачных вариантов граничных условий излучения для полной нестационарной системы Максвелла — Власова является, с нашей точки зрения, вариант, предложенный в [9]. Он обобщает на произвольный нестационарный случай так называемый принцип предельного поглощения и учитывает частотную дисперсию коэффициента отражения волн от излучающего рупора. Напомним, что известные граничные условия излучения в виде условий Зоммерфельда, принципа предельного поглощения и принципа предельной амплитуды [13] разрабатывались для решения стационарного уравнения Гельмгольца, описывающего установившийся колебательный процесс). В работе [2] требование стационарности было преодолено, но ценой увеличения размера области, где решаются уравнения Максвелла (подробнее см. ниже). Это весьма неприятное обстоятельство для таких трудоёмких задач, как численное моделирование плазменного СВЧ-генератора или усилителя, когда объем вычислений и без того велик.

Такого недостатка, связанного с серьёзным увеличением затрат вычислительных ресурсов лишён нестационарный аналог парциальных условий излучения, предложенный в [14] для моделирования СВЧ-генератора с диэлектрическим заполнением и обобщённый в [15], на системы более общего вида. В данной работе проводится изучение практического применения данных условий к конкретной электродинамической системе, исследуемой в настоящее время в прикладных целях [9].

Постановка задачи и вывод основных уравнений

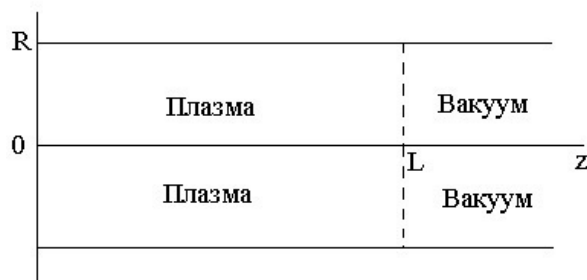


Рис. 1: Схеме открытого плазменного резонатора.

Рассмотрим следующую систему, представляющую собой открытый плазменный резонатор, схематически изображённый на Рис.1.

Основной частью системы является металлический цилиндрический волновод радиуса R с идеально проводящими стенками. Участок волновода $0 \leq z < L$ заполнен поперечно однородной плазмой.

Вдоль оси волновода наложено сильное магнитное поле, полностью замагничивающее электроны плазмы. В продольном на-

правлении (вдоль оси Oz) плазма является неоднородной. Область $z \geq L$ моделирует излучающий рупор, состыкованный с резонатором. В простейшем случае рупором является продолжение того же волновода, но только вакуумного. При этом граница $z = L$ является открытой границей, через которую и осуществляется вывод излучения.

Заметим, что граничное условие излучения целесообразно ставить не на границе плазмы $z = L$, а несколько правее — в рупоре при $z = L_0 > L$. При этом в области от $z = 0$ до $z = L_0$ должны решаться уравнения Максвелла — Власова, что дает возможность учесть в “сквозном” счёте границу плазмы, которая может быть не резкой и может меняться со временем. Поэтому, следуя [14], [15], поставим граничное условие при $z = L_0$, причём так, чтобы можно было рассматривать предел $L_0 \rightarrow L$. Дело в том, что при любом $z > L$ уравнения Максвелла решаются точно, что позволяет отобрать решение, удовлетворяющее условиям излучения, и использовать это решение как граничное условие.

Для простоты ограничимся аксиально симметричным случаем и полем, имеющим структуру E -типа (или TM -типа) [13]. В данном поле отличны от нуля только такие компоненты: E_z , E_r , B_φ . Учесть же примесь других компонент поля не представляет труда. Рассматривая плазму в линейном приближении, будем исходить из следующей системы уравнений [13]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_\varphi}{\partial t}, & \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial E_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r B_\varphi) &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (j_{zp} + j_{zd}), & \frac{\partial j_{zp}}{\partial t} &= \frac{\omega_p^2(z)}{4\pi} E_z \end{aligned} \quad (1)$$

описывающей аксиально-симметричные возбуждения волн E -типа, создаваемые некоторым внешним источником $j_{zd}(t, z, r)$. В (1) $\omega_p(z)$ — ленгмюровская частота электронов плазмы, а $j_{zp}(t, z, r)$ — продольная составляющая плотности тока, наведённого в плазме. Выберем в качестве функции, описывающей плотность тока внешнего источника:

$$j_{zd}(t, z, r) = j_{d0} J_0\left(\frac{\mu_{01}}{R} r\right) \delta(z) \vartheta(t) \sin(\omega t) \quad (2)$$

$$j_{zp}(t, z, r) = j_{d0} \delta(r - r_d) \delta(z) \vartheta(t) \sin(\omega t). \quad (3)$$

Здесь $\vartheta(t)$ — ступенчатая функция Хевисайда, δ — функция Дирака. Формула (2) соответствует бесконечно-тонкому гармонически осциллирующему заряженному плоскому слою, расположенному в начале координат, поперечная плотность которого определяется функцией Бесселя $J_0(\frac{\mu_{01}}{R} r)$, где μ_{01} — первый корень уравнения $J_0(x) = 0$ [16]. Элементарный диполь, ток которого определяется формулой (3) соответствует бесконечно-тонкому кольцу радиуса r_d , расположенному в начале координат. Формулы (2) и (3), безусловно, являются модельными и выбраны для исследования разных способов возбуждения поперечных гармоник электромагнитных колебаний. Очевидно, что формулы (2) и (3) описывают синусоидальный внешний источник, включаемый в момент времени $t = 0$. Именно в этом включении и заключается основная сложность. Без учёта момента включения задача сводится к хорошо известной, вошедшей в учебники [13].

Представим компоненты поля и j_{zp} в виде:

$$\begin{aligned} E_z(t, r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_z^{(n)} J_0(k_{\perp n} r), & E_r(t, r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_r^{(n)} J_1(k_{\perp n} r), \\ B_\varphi(t, r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_\varphi^{(n)} J_0(k_{\perp n} r), & j_{zp}(t, z, r) &= \sum_{n=1}^{\infty} j_{zp}^{(n)} J_0(k_{\perp n} r). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь J_0 и J_1 - функции Бесселя нулевого и первого порядка, соответственно; $k_{\perp n} = \frac{\mu_{0n}}{R}$ ($n=0, 1, \dots$), где μ_{0n} - корни уравнения $J_0(x) = 0$.

Чтобы получить уравнения для коэффициентов $E_z^{(n)}$, $E_r^{(n)}$, $B_\varphi^{(n)}$, $j_{zp}^{(n)}$ подставим разложения (4) в уравнения (1) и, учитывая ортогональность функций Бесселя, будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} + k_{\perp n} E_z^{(n)} &= -\frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial \tau}, & \frac{\partial B_\varphi^{(n)}}{\partial z} &= -\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau} &= k_{\perp n} B_\varphi^{(n)} - J_{zp}^{(n)} - J_d^{(n)}, & \frac{\partial J_{zp}^{(n)}}{\partial t} &= \tilde{\omega}_p^2(z) E_z^{(n)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь обозначено

$$\tau = ct, \quad \tilde{\omega}(z) = \frac{\omega_p(z)}{c}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega}{c}, \quad J_{zp}^{(n)} = \frac{4\pi}{c} j_{zp}^{(n)}, \quad (6)$$

$$J_d^{(n)} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} j_{d0} \delta(z) \vartheta(t) \sin(\tilde{\omega}\tau); & n = 1 \\ 0; & n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (7)$$

$$J_d^{(n)} = \frac{8\pi}{c} \frac{r_d J_0(k_{\perp n} r_d)}{R^2 J_1^2(\mu_{0n})} j_{d0} \delta(z) \vartheta(t) \sin(\tilde{\omega}\tau); \quad (8)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Как видно из этих обозначений, новая переменная τ имеет, как и координата z размерность длины M , а частоты $\tilde{\omega}_p$ и $\tilde{\omega}$ и - размерность волнового числа M^{-1} . Приведённое в (7) выражение для $J_d^{(n)}$ справедливо, если j_{zd} определяется формулой (2). Если же $J_d^{(n)}$ задаётся формулой (3), то для j_{zd} имеем выражение (8).

Система уравнений (5) дополняется начальными и граничными условиями:

$$E_r^{(n)}|_{\tau=0} = B_\varphi^{(n)}|_{\tau=0} = E_z^{(n)}|_{\tau=0} = J_{zp}^{(n)}|_{\tau=0} = 0, \quad E_r^{(n)}|_{z=0} = 0, \quad (9)$$

а также условием излучения при $z = L$ на правом конце системы. Так как при $z = L$ $\omega_p(L) = 0$, то уравнения (5) содержат только компоненты поля, то есть являются однородными. Используя преобразование Лапласа [17], решение (5) для данного случая можно записать в виде [15]:

$$\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial \tau} = -\frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} + k_{\perp n} \int_0^\tau J_1(k_{\perp n}(\tau - \tau')) \frac{\partial E_r^{(n)}}{\partial z} d\tau', \quad (10)$$

где J_1 функция Бесселя первого порядка. Эти соотношения, следуя [14],[15], мы и рассматриваем как нестационарные парциальные граничные условия излучения, записанные в точке $z = L$ - левой границы излучающего устройства. Как видно, это условие является достаточно сложным интегро-дифференциальным уравнением, и поэтому численная его реализация не совсем проста. Для определённости во всех дальнейших расчётах примем длину системы $L = 10$ см, а $R = 1,8$ см. На выходе системы будем вычислять поток электромагнитной энергии, определяя его формулой:

$$N = \sum_{i=1}^n E_r^{(n)}(\tau, L) B_\varphi^{(n)}(\tau, L) J_1^2(\mu_{0n}), \quad (11)$$

где каждое слагаемое представляет собой вклад в суммарный поток энергии, даваемый n -ой поперечной модой. Спектральный состав поля излучения определим на выходе системы для каждой n -ой моды по формулам:

$$E_r^{(n)}(\Omega) = \int_0^\tau E_r^{(n)}(\tau', L) \exp(i\Omega\tau') d\tau', (n = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

являющимся, фактически, образами Фурье функций $E_r^{(n)}(\tau, L)$.

Подставляя в (5)

$$E_r^n, \quad B_\varphi^n, \quad E_z^n, \quad J_p^n \sim \exp(-i\omega t + ik_z z), \quad (13)$$

считая при этом $\tilde{\omega}_p = \text{const}$, можно получить известное дисперсионное уравнение:

$$k_{\perp n}^2 + (k_z^2 - \tilde{\omega}_p^2)(1 - \frac{\tilde{\omega}_p^2}{\tilde{\omega}^2}) = 0, \quad (14)$$

откуда следует, что частота отсечки $\tilde{\omega}_{0n}$ для n -ой поперечной моды в случае вакуумного волновода ($\tilde{\omega}_p=0$) в наших обозначениях равна:

$$\tilde{\omega}_{0n} = k_{\perp n}. \quad (15)$$

Из (14) можно также получить выражение для продольного волнового числа k_z

$$k_z^2 = \frac{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}_p^2 - k_{\perp n}^2}{1 - \tilde{\omega}_p^2/\tilde{\omega}^2} \quad (16)$$

Результаты численного интегрирования

Численный анализ системы (5) начнём со случая вакуумного волновода, когда $\tilde{\omega}_p = 0$. Пусть $J_d^{(n)}$ определяется формулой (7). При этом в волноводе будет возбуждаться только основная мода ($n=1$) колебаний, и отличными от нуля будут только компоненты поля $E_r^{(1)}; B_\varphi^{(1)}; E_z^{(1)}$ (что видно непосредственно из системы (5) и начальных условий (9)). Из (15) следует, что минимальная частота отсечки $\tilde{\omega}_{01} = k_{\perp 1} = \mu_{01}/R \approx 1,33$. Рассмотрим отдельно случаи, когда частота внешнего источника $\tilde{\omega}$ в (7) больше $\tilde{\omega}_{01}$ и, соответственно, меньше чем $\tilde{\omega}_{01}$.

Пусть в начале $\tilde{\omega} = 20$ ($\tilde{\omega} \approx 15\tilde{\omega}_{01}$). Результаты расчётов для данного $\tilde{\omega}$ представлены на Рис.2, Рис.3 и Рис.4.

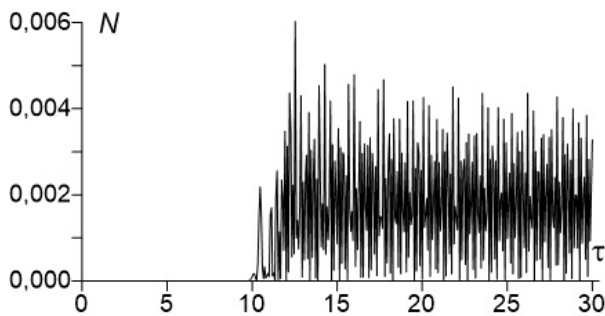


Рис. 2: Зависимость потока энергии электромагнитного поля на правой границе системы от времени τ при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 20$.

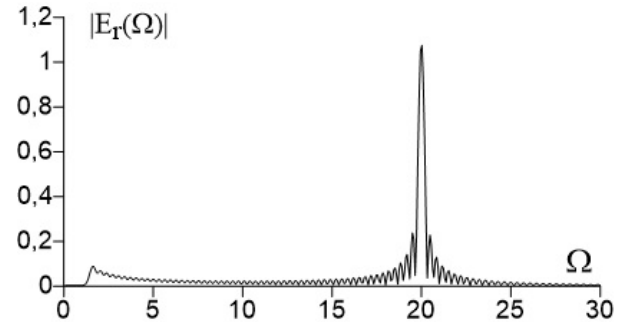


Рис. 3: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 20$

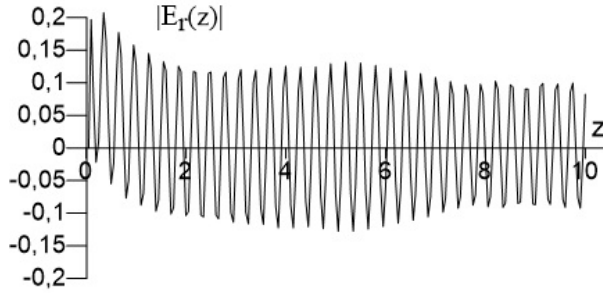


Рис. 4: Зависимость поля $E_r^{(1)}$ от продольной координаты z в момент времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 20$.

системы, рассчитанный по формуле (12). Из этого рисунка видно, что в данном случае излучение происходит фактически на заданной частоте диполя $\tilde{\omega}$ (на частоте вынуждающей силы).

На Рис.4 представлена зависимость поля $E_r^{(1)}$ от продольной координаты z в момент времени $\tau = 30$. Видно, что к этому моменту времени в системе установилось практически гармоническое распределение поля вдоль оси волновода с характерным продольным размером $\Lambda = 2\pi/k_z \approx 2\pi/\tilde{\omega} \approx 0,31$ (так как из (16) (при $\tilde{\omega}_p = 0$) следует, что для данного $\tilde{\omega} = 20$ и $k_{\perp n} \approx 1,33 \mapsto k_z = \sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} \approx \tilde{\omega}$).

Пусть теперь частота внешнего источника меньше минимальной частоты отсечки $\tilde{\omega}_{01} = 1,33$ и равна $\tilde{\omega} = 0,5$ ($\tilde{\omega} \approx 0,4 \tilde{\omega}_{01}$). Результаты расчётов для данной частоты представлены на Рис.4, Рис.5 и Рис.6, где приводятся те же зависимости, что и на Рис.1-Рис.3.

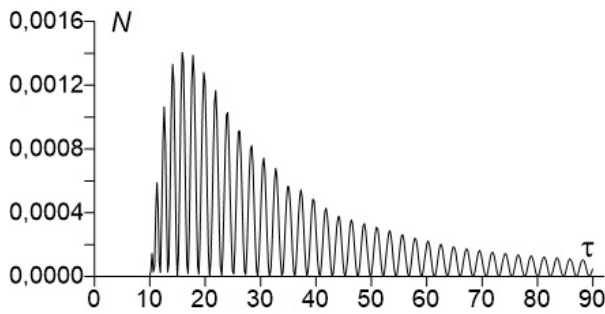


Рис. 5: Зависимость потока энергии электромагнитного поля на правой границе системы от времени τ при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 0,5$.

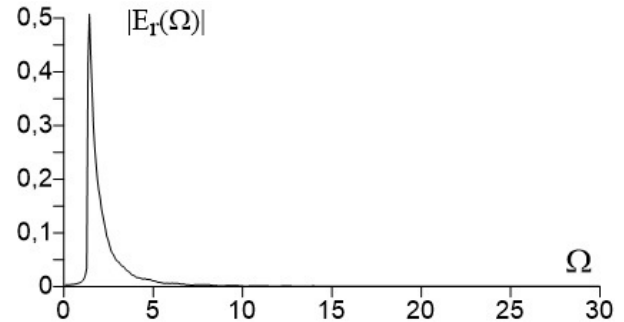


Рис. 6: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 0,5$

Из Рис. 6 видно, что в данном случае в спектре отсутствует частота, соответствующая частоте диполя $\tilde{\omega}$ — частота вынужденных колебаний. Возбуждаться в данных условиях могут только колебания с частотами большими или равными частоте отсечки $\tilde{\omega}_{01}$.

Однако, эти колебания не носят волновой характер, что следует из Рис. 7, где видно аperiodическое уменьшение поля $E_r^{(1)}$ с увеличением z . Кроме того, из Рис. 5 видно, что поток энергии, выходящей из системы, на достаточно больших временах ($\tau \sim 90$), когда электродинамические процессы в системе практически вышли на стационарный режим, на порядок

меньше чем в предыдущем случае (Рис. 2).

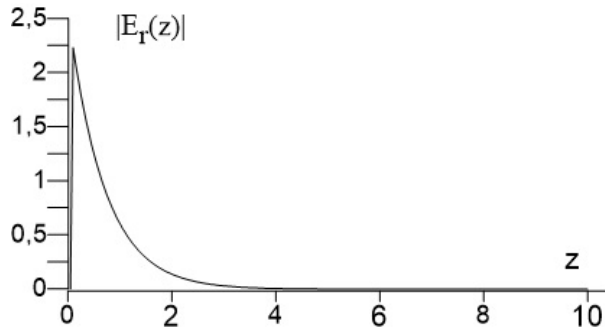


Рис. 7: Зависимость поля $E_r^{(1)}$ от продольной координаты z в момент времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 0,5$.

то как известно [8], поле в волноводе будет представлять собой суперпозицию бегущих волн, число которых ограничено. Это видно и из (16) при $\tilde{\omega}_p = 0$: $k_z^2 = \tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2$, а поскольку собственные числа $k_{\perp n}$ непрерывно увеличиваются с ростом n , то при некотором n данная разность станет отрицательной, и волна, соответствующая этому номеру, будет затухать (асимптотически убывая по амплитуде до нуля при $z \rightarrow \infty$). Выберем $\tilde{\omega} = 5$, тогда в волноводе могут существовать три бегущие волны, так как $k_z^2 = \tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2 = \tilde{\omega}^2 - \mu_{0n}^2/R^2 > 0$, если $\mu_{0n}/R < \tilde{\omega}$, или $\mu_{0n} < \tilde{\omega}R = 9$, что будет выполнено для $\mu_{01} \approx 2,4$; $\mu_{02} \approx 5,52$ и $\mu_{03} \approx 8,65$ ($\mu_{04} \approx 11,79$). Положим, для определённости, в формуле (8) $r_d = 0,65$ см. Данное значение r_d соответствует расположению элементарного диполя вблизи максимума второй поперечной моды волновода, и, определяет тем самым условия наиболее интенсивного возбуждения этой моды.

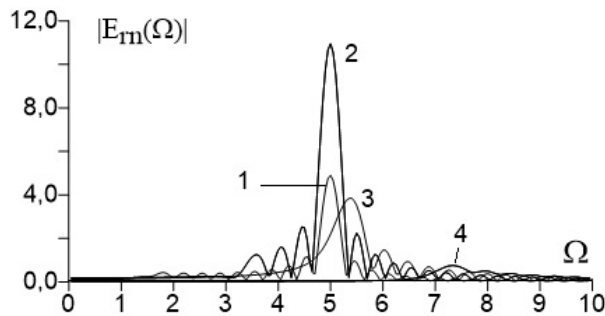


Рис. 8: Спектральные характеристики $|E_r^{(n)}(\Omega)|$ первых четырёх поперечных мод ($n=1; \dots; 4$) поля излучения при возбуждении колебаний диполем (3); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 5$.

Поскольку $E_r^{(1)}$ и $B_\varphi^{(1)}$ изменяются на выходе системы с течением времени с частотой $\tilde{\omega}_{01}$, то поток энергии N , определяемый формулой (12), будет изменяться с частотой, равной $2\tilde{\omega}_{01}$, что также следует из Рис. 5, где временной период $T = (2\pi)/(2\tilde{\omega}) \approx 2,4$. Следует отметить, что аналогичная периодичность потока энергии N имеет место и в предыдущем случае, когда $\tilde{\omega} = 20$. Однако вследствие очень большой частоты ($T = (2\pi)/(2\tilde{\omega}) \approx 0,11$) на Рис. 2 данная периодичность чётко не отражается.

Пусть теперь $J_d^{(n)}$ определяются формулой (8). В этом случае в волноводе помимо основной ($n=1$) могут возбуждаться и высшие поперечные моды (так как все $J_d^{(n)} \neq 0$). При этом, если частота внешнего источника $\tilde{\omega}$ задана, и она больше частоты отсечки ω_{01} ,

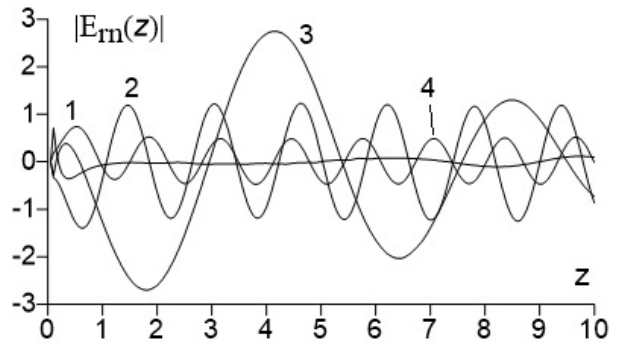


Рис. 9: Зависимости первых четырёх поперечных мод $E_r^{(n)}$ ($n=1; \dots; 4$) от продольной координаты z в момент времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (3); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 5$

На Рис. 8 изображены спектральные характеристики $|E_r^{(n)}(\Omega)|$ первых четырёх поперечных мод ($n=1; \dots; 4$). Из этого рисунка видно, что на частоте внешнего источника $\tilde{\omega} = 5$ воз-

буждены первые три поперечные моды, причём наиболее интенсивно возбуждается вторая мода, а третья, условие существования которой в виде бегущей волны находится “на грани”, имеет уже частоту, несколько отличную от частоты вынуждающей силы. Этот вывод подтверждается также Рис. 9, где представлены зависимости $E_r^{(n)}$ ($n=1;\dots;4$) от координаты z для момента времени $\tau = 30$.

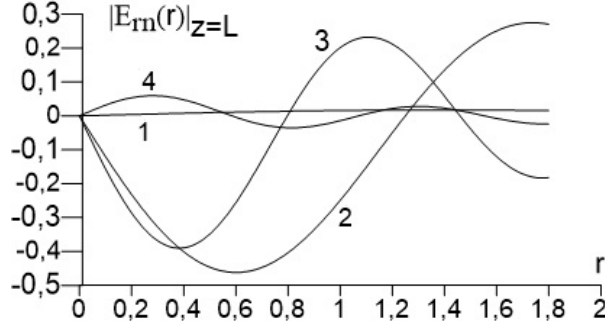


Рис. 10: Зависимости первых четырёх поперечных мод $E_r^{(n)}(L)$ ($n=1;\dots;4$) от поперечной координаты r в момент времени $\tau = 30$ при возбуждении колебаний элементарным диполем (3); $\tilde{\omega}_p = 0$ и $\tilde{\omega} = 5$.

ется вторая мода, дающая, очевидно, наибольший вклад в суммарный поток энергии, излучаемой через правый торец волновода.

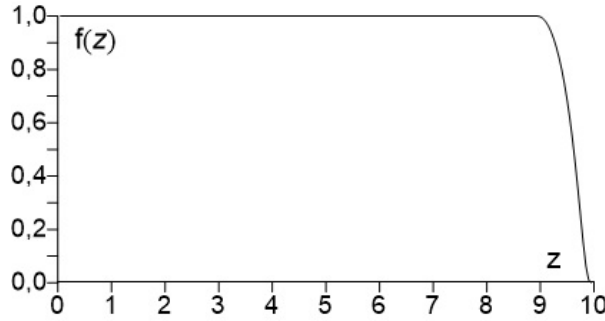


Рис. 11: Вид функции, определяющей зависимость плотности плазмы от продольной координаты.

На Рис. 12 приведена спектральная характеристика поля излучения $|E_r^{(1)}(\Omega)|$. Из этого рисунка видно, что в системе наиболее интенсивно возбуждаются колебания на частоте внешнего источника $\tilde{\omega} = 20$. Кроме того, возбуждаются две частоты, близкие к ω_{p0} .

Это является следствием того, что в системе теперь имеются уже три характерные частоты — $\tilde{\omega}$, ω_{p0} и $\tilde{\omega}_{01} = k_{\perp 1} = \frac{\mu_{01}}{R} \approx 1,33$. Поэтому, по сравнению со случаем вакуумного волновода (Рис. 3), где возбуждались колебания на частоте вынуждающей силы $\tilde{\omega}$ и вблизи

Из этого рисунка видно, что первая и вторая поперечные моды имеют волновую природу с характерным продольным масштабом, который можно приближённо оценить, как и в случае, Рис. 3. Для первой моды: $\Lambda_1 = 2\pi/k_z \approx 2\pi/\omega$; для второй моды: $\Lambda_2 = 2\pi/\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp 2}^2} \approx 1,6$. Четвёртая мода практически не возбуждается, третья мода уже утратила задаваемую частотой диполя периодичность, и незначительно, но убывает по амплитуде. Таким образом, эта мода, хоть и оказалась в данный момент времени самой большой по амплитуде, бегущей волной фактически не является.

На Рис. 10 приведены зависимости первых четырёх поперечных мод $E_r^{(n)}$ ($n = 1; \dots; 4$) от поперечной координаты r при $z = L$ для момента времени $\tau = 30$. Видно, что наиболее интенсивной, как и на Рис. 8 оказыва-

Рассмотрим теперь решение уравнений (5) при $\tilde{\omega}_p(z) = \tilde{\omega}_{p0}f(z) \neq 0$, где $\tilde{\omega}_{p0} = \text{const}$. Причём, будем считать, что плазма однородно заполняет волновод, то есть её плотность везде const, и, только вблизи границы системы $z = L$ уменьшается до нуля не скачкообразно, а по более гладкому закону, в соответствие с функцией $f(z)$, вид которой приведён на Рис. 11.

Пусть плотность тока внешних источников $J_d^{(n)}$ в уравнениях (5) определяется формулой (7). Зададим частоту внешнего источника $\tilde{\omega} = 20$, а $\tilde{\omega}_{p0} = 10$ (что соответствует $\omega_{p0} = 30 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$).

Данный случай отличается от случая, представленного на Рис. 2 — Рис. 4 лишь наличием плазменного заполнения в волноводе.

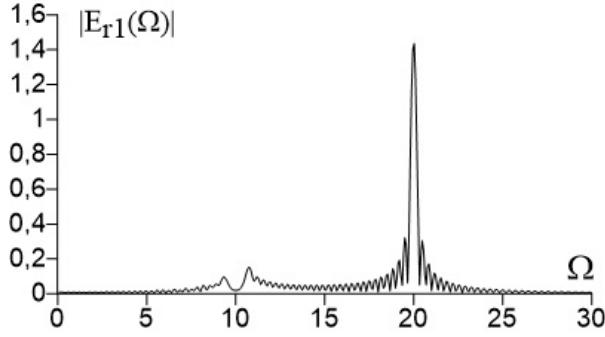


Рис. 12: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_{p0}=10$ и $\tilde{\omega}=20$

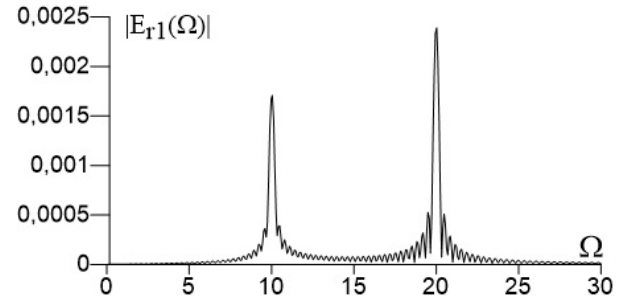


Рис. 13: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $R=18\text{см}$, $\tilde{\omega}_{p0}=10$ и $\tilde{\omega}=20$

частоты отсечки $\tilde{\omega}_{01}$, на Рис. 12 видно, что теперь возбуждаются колебания и на частотах, близких к $\tilde{\omega}_{p0} - \tilde{\omega}_{01}$ и $\tilde{\omega}_{p0} + \tilde{\omega}_{01}$. Наличие в спектре этих двух частот обусловлено поперечной неоднородностью системы — $k_{\perp 1} = \mu_{01}/R > 0$. Если же $R \rightarrow \infty$, то $k_{\perp 1} \rightarrow 0$ и колебания будут возбуждаться на частотах $\tilde{\omega}$ и ω_{p0} , что подтверждается Рис. 13, где в отличие от Рис. 12 при расчётах радиус волновода увеличен в 10 раз и равен $R=18\text{см}$.

На Рис. 14 представлен случай равенства плазменной частоты и частоты внешнего источника $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{p0} = 20$. Из этого рисунка видно, что доминирующими в спектре являются частоты, близкие к $\tilde{\omega}_{p0} - \tilde{\omega}_{01}$ и $\tilde{\omega}_{p0} + \tilde{\omega}_{01}$, а излучение на частоте вынуждающей силы весьма незначительно.

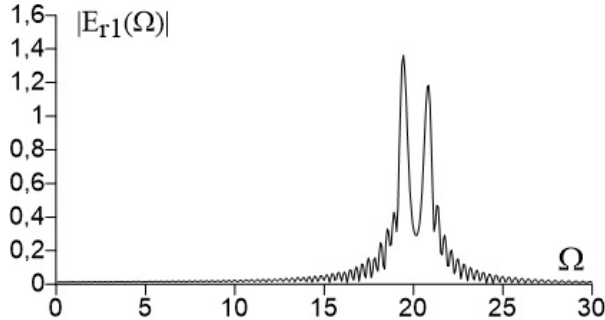


Рис. 14: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{p0} = 20$

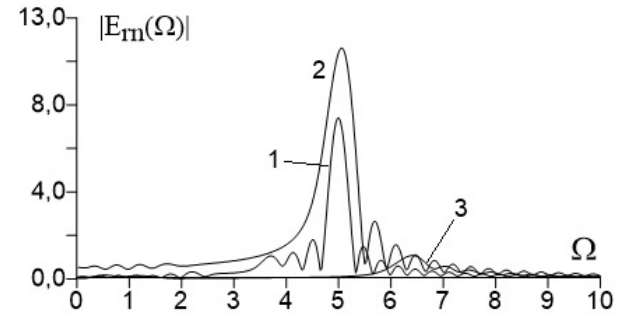


Рис. 15: Спектральные характеристики $E_r^{(n)}(\Omega)$ первых трёх поперечных мод ($n=1; \dots; 4$) поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (3); $\tilde{\omega}_{p0}=3$ и $\tilde{\omega}=5$

Пусть теперь плотность тока внешних источников $J_d^{(n)}$ определяется формулой (8). Чтобы ограничить число бегущих волн в системе положим, как и в случае, изображённом на Рис. 8-Рис. 10 $\tilde{\omega}=5$. Как отмечалось при обсуждении Рис. 8-Рис. 10 число бегущих волн в случае вакуумного волновода было равно трём. Выберем $\tilde{\omega}_{p0}=3$, тогда, в соответствии с (16) условию $k_z^2 = \tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}_{p0}^2 - k_{\perp n}^2 \geq 0$ будут удовлетворять только две поперечные моды ($n=1$ и $n=2$) Именно эти две поперечные моды наиболее интенсивно возбуждаются на частоте $\tilde{\omega}=5$, что видно из Рис.15. Третья же мода, в отличие от Рис. 8 возбуждается незначительно, причём на частоте, отличной от $\tilde{\omega}=5$. Четвёртая мода практически не возбуждается и поэтому её

спектральная характеристика на Рис. 15 не приводится. Графики зависимостей поперечных мод от координат z и r также не приводятся, так как они аналогичны представленным на Рис. 9 и Рис. 10.

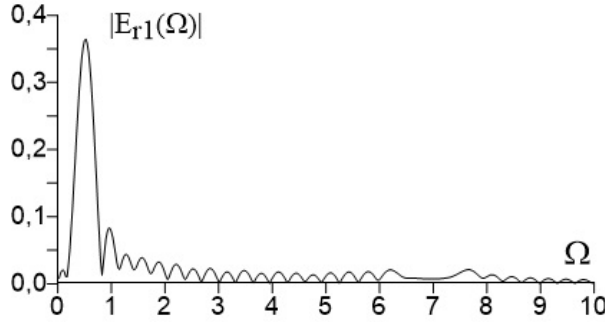


Рис. 16: Спектральная характеристика $|E_r^{(1)}(\Omega)|$ первой поперечной моды поля излучения при возбуждении колебаний элементарным диполем (2); $\tilde{\omega}_{p0}=7$ и $\tilde{\omega}=0,5$

Рассмотрим в заключение случай возбуждения колебаний в плазменном волноводе внешним источником (плотность тока которого определяется (7)) с частотой $\tilde{\omega}=0,5$, меньшей частоты отсечки $\tilde{\omega}_{01}$. При этом положим $\tilde{\omega}_{p0}=7$. Полученная при расчётах спектральная характеристика представлена на Рис.16. Как видно из этого рисунка, колебания в данной системе возбуждаются как на частотах, близких к плазменной: $\tilde{\omega}_{p0}-\tilde{\omega}_{01}$ и $\tilde{\omega}_{p0}+\tilde{\omega}_{01}$ (хотя интенсивность этих колебаний и весьма незначительна), так и на частоте вынуждающей силы $\tilde{\omega}$. Это отличает данный случай от случая вакуумного волновода, спектральная характеристика которого изображена на Рис.6. Данное отличие обусловлено, очевидно, тем, что для плазменного волновода частота отсечки равна нулю.

Сравнение аналитических и численных решений

Следует отметить, что в наиболее простых случаях указанные в работе закономерности возбуждения электромагнитных полей в волноводах заданными источниками могут быть описаны аналитически. Так, если плазма отсутствует $J_p^n = 0$, а колебания в волноводе возбуждаются диполем в соответствии с формулой (8), то решая систему уравнений (5) с помощью преобразования Лапласа по обеим координатам [17], можно получить для $E_r^{(n)}$ следующее выражение:

$$E_r^{(n)} = J_{do}^{(n)} \cos(z\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2}) \cos(\tilde{\omega}\tau). \quad (17)$$

Здесь $J_{do}^{(n)} = \text{const}$, включающая множители, стоящие перед δ - функцией в (8), а множитель в аргументе первого косинуса $\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} = k_z$ - продольное волновое число, что следует и из (16). Если $k_{\perp n} < \tilde{\omega}$, то выражение (17) представляет собой бегущую влево и вправо вдоль оси $0z$ волну, так как (17) можно переписать в виде:

$$E_r^{(n)} = J_{do}^{(n)} [\cos(z\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} + \tilde{\omega}\tau) + \cos(z\sqrt{\tilde{\omega}^2 - k_{\perp n}^2} - \tilde{\omega}\tau)]. \quad (18)$$

Если же $k_{\perp n} > \tilde{\omega}$, то для этих номеров n , учитывая, что $\cos(i\varphi) = \cosh(\varphi)$, выражение (17) запишется в виде:

$$E_r^{(n)} = J_{do}^{(n)} \cosh(z\sqrt{k_{\perp n}^2 - \tilde{\omega}^2}) \cos(\tilde{\omega}\tau). \quad (19)$$

Эта формула описывает колебания, убывающие и возрастающие по амплитуде вдоль оси волновода. Поскольку последнее в данной системе невозможно, то отбрасывая в (19) возрастающую пространственную экспоненту, получим:

$$E_r^{(n)} = \frac{1}{2} J_{do}^{(n)} \exp(-z\sqrt{k_{\perp n}^2 - \tilde{\omega}^2}) \cos(\tilde{\omega}\tau). \quad (20)$$

- формулу, описывающую затухающие колебания. Производя сравнение полученных формул с численными решениями системы (5), приведёнными на рисунках, можно отметить их хорошее согласие друг с другом. Так, кривая на Рис.4 и кривые $E_r^{(1)}$ и $E_r^{(2)}$ на Рис.9 описываются формулой (18), кривая на Рис.7 – формулой (20). Действительно, поскольку в этом случае $\tilde{\omega}=0,5$, то $\Lambda = 2\pi/\omega \approx 12,56$ – при весьма сильном затухании $\exp(-z\sqrt{k_{\perp n}^2 - \tilde{\omega}^2}) \approx \exp(-1,33z)$ на длине системы $L = 10$ см. при такой частоте, даже не уложилось целого колебания, что и видно из Рис.7. Кривая $E_r^{(3)}$ на Рис.8, поскольку $k_{\perp 3} \approx \tilde{\omega}$, описывается, фактически, формулой (20).

Заключение

Из проведённого в работе с помощью аналитических и численных методов анализа процесса возбуждения электромагнитных полей диполем в вакуумном и плазменном волноводах можно сделать следующий вывод. Использование при численном моделировании парциальных граничных условий излучения верно отражает динамику рассматриваемых электродинамических процессов и является перспективным для изучения переходных процессов в более сложных электродинамических системах с плазменным и иным заполнением, независимо от природы причины, приводящей к возникновению колебаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bohm D. and Gross E. P., Theory of Plasma Oscillations // Physical Review, 1949, Vol. 75, No. 12, pp. 1851-1864
2. Dunaevsky A., Krasik Ya. E., Krokhmal A., et. al. Emission properties of metal-ceramic, velvet, and carbon fiber cathodes // Proc. of 13th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS 2000), Nagaoka, Japan, June 25-30, 2000, p.516-519.
3. Dunaevsky A., Krasik Ya. E., Krokhmal A., and Felsteiner J. Ferroelectric plasma cathodes // Proc. of 13th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS 2000), Nagaoka, Japan, June 25-30, 2000, p. 528-531.
4. Fisher A., Garate E. Long pulse electron beams produced from carbon fiber cathodes // Proc. 12th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS'98) Haifa, Israel, June 7-12, 1998, p.133-136.
5. Clark M.C., Marder B.M. and Bacon L.D. Magnetically insulated transmission line oscillator // Appl. Phys. Lett, 1988, Vol. 52, pp. 78-80.
6. Ashby D. E. T. F., Eastwood J. W., Allen I. et al. Comparison between experiment and computer modeling for simple MILO configurations // IEEE Trans. Plasma Sci, 1995, Vol. 23, No 6, pp.959-969.
7. Eastwood J. W., Hawkins K. C., and Hook M. P. The tapered MILO // IEEE Trans Plasma Sci, 1998, Vol. 26, No 3, pp.698-712.
8. Кузелев М.В., Рухадзе А.А., Стрелков П.С. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника - Изд. 2-е, доп. - Москва: URSS, cop. 2018. - 622 с.
9. Strelkov P. S. Experimental plasma relativistic microwave electronics // Physics - Uspekhi, 2019, Vol.62, No 5, pp.465-486.

10. Свешников А.Г., Могилевский И.Е. Избранные математические задачи теории дифракции М.: физический факультет МГУ, 2012. – 239с.
11. Коняев Д.А., Делицын А.Л. Математическое моделирование дифракции акустических и электромагнитных полей на сложных рассеивателях методом конечных элементов // Журнал радиоэлектроники (электронный), 2014, N 4.
<http://jre.cplire.ru/jre/apr14/3/text.html>
12. Майков А.Р., Свешников А.Г., Якунин С.А. Математическое моделирование плазменного генератора сверхвысокочастотного излучения. // ЖВМ и МФ, 1985, Т.25, № 6, С.883-894
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977, 636с.
14. Кузелев М.В., Майков А.Р., Поезд А.Д., Рухадзе А.А., Свешников А.Г., Якунин С.Я. Метод крупных частиц в электродинамике пучковой плазмы. // ДАН СССР, 1988, Т. 300, № 5, С.1112-1115.
15. Bobylev Yu.V., Kuzelev M.V., Rukhadze A.A., Sveshnikov A.G. Nonsteady partial boundary conditions on radiation in the problems of relativistic high – current plasma microwave electronics. // Plasma Physics Reports. 1999. Vol.25. No 7. pp. 561-566.
16. Холодова С.Е., Перегудин С.И. Специальные функции в задачах математической физики. – СПб: НИУ ИТМО, 2012, 72 с.
17. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. Издательство Лань, 2015, 447с

REFERENCES

1. Bohm D. & Gross E. P. 1949, “Theory of Plasma Oscillations“, Physical Review, Vol. 75, no. 12, pp. 1851-1864
2. Dunaevsky A., Krasik Ya. E., Krokhmal A., et. al. 2000, “Emission properties of metal-ceramic, velvet, and carbon fiber cathodes“, Proc. of 13th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS 2000), Nagaoka, Japan, June 25-30, pp.516-519.
3. Dunaevsky A., Krasik Ya. E., Krokhmal A. & Felsteiner J. 2000, “Ferroelectric plasma cathodes“, Proc. of 13th Int. Conf. on High-Power Particle Beams (BEAMS 2000), Nagaoka, Japan, June 25-30, pp. 528-531.
4. Fisher A. & Garate E. 1998, “Long pulse electron beams produced from carbon fiber cathodes“, Proc. 12th Int. Conf. on High-Power Particle Beams(BEAMS’98) Haifa, Israel, June 7-12, p.133-136.
5. Clark M.C., Marder B.M. & Bacon L.D. 1988, “Magnetically insulated transmission line oscillator“, Appl. Phys. Lett, Vol. 52, pp. 78-80.
6. Ashby D. E. T. F., Eastwood J. W., Allen I. et al. 1995, “Comparison between experiment and computer modeling for simple MILO configurations“, IEEE Trans. Plasma Sci, Vol. 23, no 6, pp.959-969.
7. Eastwood J. W., Hawkins K. C. & Hook M. P. 1998, “The tapered MILO“, IEEE Trans Plasma Sci, Vol. 26, no 3, pp.698-712.

8. Kuzelev M.V., Rukhadze A. A. & Strelkov P.S. 2018, "Plasma relativistic microwave electronics", Izd. 2nd, additional, Moscow: URSS, 622 p.
9. Strelkov P. S. 2019, "Experimental plasma relativistic microwave electronics", Physics - Uspekhi, Vol. 62, no. 5, pp.465–486.
10. Sveshnikov A.G. & Mogilevsky I.E. 2012, "Selected mathematical tasks of the theory of diffraction" M.: the faculty of physics at Moscow State University, 239p.
11. Konyaev D. A. & Delitsyn A. L., 2014, " Mathematical modeling of the diffraction of acoustic and electromagnetic fields on complex dispersors by the method of finite elements ", Journal of Electronics (electronic), no. 4 <http://jre.cplire.ru/jre/apr14/3/text.html>
12. Maikov A.R., Sveshnikov A.G. & Yakunin S.A. 1985, "Mathematical modeling of a plasma generator of ultra-high-frequency radiation", JVM and MF, T.25, no 6, pp.883-894.
13. Tikhonov A.N. & Samarsky A.A. 1977, "Mathematical physics equations", - M.: Science, 636p.
14. Kuzelev M.V., Maikov A.R., Train A.D., Rukhadze A.A., Sveshnikov A.G. & Yakunin S.Y. 1988, "Method of large particles in electrodynamics beam plasma" , DAN USSR, T. 300, no. 5, pp.1112-1115.
15. Bobilev Yu.V., Kuzelev M.V., Rukhadze A.A. & Sveshnikov A.G. 1999. "Nonsteady partial boundary conditions on radiation in the problems of relativistic high – current plasma microwave electronics", Plasma Physics Reports. Vol.25. no 7. pp. 561-566.
16. Kholodova S.E. & Peregudine S.I. 2012, "Special functions in the tasks of mathematical physics", St. Petersburg: ITMO Research Institute, 72p.
17. Panteleyev A.V. & Yakimov A.A.S. 2015, "Theory of Complex Variable Function and Operational Calculus in Examples and Tasks", Lan Publishing House, 447p.