ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 3 (2013)

УДК 519.14

ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРЕМ В. МАГНУСА И М. Д. ГРИНДЛИНГЕРА

В. Н. Безверхний, А. Е. Устян (г. Тула)

Аннотация

В настоящей работе получены обобщения известной теоремы В. Магнуса об изоморфизме групп с одним определяющим соотношением и теоремы Гриндлингера об изоморфизме групп с условием $C'\left(\frac{1}{6}\right)$ на группы $C(6)$; $C(4)$ и $T(4)$ и $C(3), T(6)$.

Из доказанной теоремы получены следствия на группе с малым сокращением.

Ключевые слова: симметризованное множество, определяющие соотношения, изоморфизм.

GENERALIZATIONS OF THEOREMS OF MAGNUS AND GREENDLINGER

V. N. Bezverkhniy, A. E. Ustyan (Tula)

Abstract

We obtain the generalizations of the well-known Magnus theorem on isomorphism of groups with one defining relation and Greendlinger‘s theorem on isomorphism of groups with condition $C'(\frac{1}{6})$ on the groups $C(6)$; $C(4)$ and $T(4)$, $C(3)$ and $T(6)$.

Key words: symmetrized set, defining relations, isomorphism.

Пусть G — группа, заданная системой образующих $a_i\,(i = 1, \ldots, n)$ и множеством $\Re$ определяющих слов $R_j\,(j = 1, \ldots, m)$.

Множество $\Re$ предполагается симметризованным, то есть в $\Re$ все определяющие слова попарно различны, циклически несократимы и для любого определяющего слова все его циклические перестановки, а также обратные к ним слова принадлежат $\Re$.

Слово U назовем куском относительно $\Re$, если существуют два определяющих слова R_i, R_j, $i \neq j$ из $\Re$, что $R_i \doteq UX$, $R_j \doteq UY$ ($\doteq$ - графическое равенство), где X, Y - некоторые слова в алфавите группы G.

Будем говорить, что конечно определенная группа G:

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n | R_1, R_2, \ldots, R_m \rangle \tag{1}$$

с симметризованным множеством определяющих соотношений $\Re = \{R_j | j = \overline{1, m}\}$ удовлетворяет условию $C(p)$, если каждое определяющее соотношение из $\Re$ может быть представлено произведением минимум p-кусков.

Будем говорить, что G удовлетворяет условию $T(q)$, если для любых $R_1, R_2, \ldots, R_h$, $3 \leq h < q$, таких, что R_i, R_{i+1}, $(1 \leq i < h-1)$ и R_h, R_1,— не взаимно обратны, по крайне мере, одно из произведений: $R_1R_2, R_2R_3, \ldots, R_{h-1}R_h, R_hR_1$ — приведено.

В дальнейшем будем рассматривать группы G, удовлетворяющие условию $C(6)$, либо $C(4)$ и $T(4)$, либо $C(3)$ и $T(6)$.

Будем говорить, что группа G, заданная на множестве образующих $\{a_j | j = \overline{1, n}\}$ с симметризованным множеством определяющих соотношений $\Re = \{R_j | j = \overline{i, m}\}$ удовлетворяет условию $C'(\lambda)$, если для любого $R \in \Re$, $R = UX$, где U — кусок, $|U| < \lambda |R|$, где $|w|$ — длина слова w в свободной группе $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

В. Магнус для групп с одним определяющим соотношением доказал следующую теорему [3]:

Теорема 1. *(Магнус). Пусть* $G = \langle a_1, \ldots, a_n; R \rangle$ *и* $H = \langle a_1, \ldots, a_n; S \rangle$ *группы с одним определяющим соотношением. Отображение* $a_i \to a_i$, $(i = \overline{1, n})$ *определяет изоморфизм группы* G *на группу* H *тогда и только тогда, когда слова* R *и* S^ε $(\varepsilon = \pm 1)$ *сопряжены в свободной группе* $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

М. Д. Гриндлинер [2] получил обобщение этой теоремы на случай групп с условием $C'(1/6)$.

Теорема 2. *(Гриндлинер). Пусть группы* G *и* H *с условием* $C'(1/6)$, *заданные в одном алфавите* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *с симметризованным множеством* $\Re$ *и* $\Im$ *определяющих слов соответственно. Тогда отображение* $a_i \to a_i$, $(i = \overline{1, n})$, *определяет изоморфизм* G *на* H *в том и только в том случае, когда* $\Re = \Im$.

В статье [4] Е. В. Кашенцевым доказана

Теорема 3. *(Кашенцев). Пусть* G *и* H *группы, заданные на одном алфавите* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *симметризованным множеством определяющих соотношений, удовлетворяющих одновременно условию* $C'(1/5)$ *либо* $C'(1/3)$ *и* $T(4)$. *Тогда отображение* $a_i \to a_i$, $(i = \overline{1, n})$, *определяет изоморфизм* G *на* H *в том и только в том случае, когда* $\Re = \Im$.

В [4] приведены примеры группы с условием $\lambda = 1/5$ и группы с условием $\lambda = 1/3$ и $T(4)$, для которых теорема 3 несправедлива.

Основной целью данной статьи — обобщение теоремы Магнуса на группы с условием $C(6)$, $C(4)$ и $T(4)$, и $C(3)$ и $T(6)$.

Пусть $G = \langle a_i,\, i = \overline{1,n} | R_j,\, j = \overline{1,m} \rangle$, где $\Re = \{R_j,\, j = \overline{1,m}\}$ - симметризованное множество, удовлетворяющее условию $C(6)$ либо $C(4)$ и $T(4)$, либо $C(3)$ и $T(6)$.

Предполагаем, что понятие планарной карты, диаграммы, обозначаемой в дальнейшим M, приведенной диаграммы, последовательной части границы диаграммы M,компоненты диаграммы M, границы области D из M — известны [3].

Обозначим через ∂M — граничный цикл M, через ∂D — граничный цикл области D, через $\varphi(\partial M)$ — метку граничного цикла диаграммы M, $\varphi(\partial D)$ — метку области D.

Будем говорить, что диаграмма M рассматривается над $\Re = \{R_i,\, i = \overline{1,m}\}$, где $\Re$ — симметризованное множество, $\Re \subset F = \langle a_i,\, i = \overline{1,n} \rangle$ (F — свободная группа), если метка каждой области D — $\varphi(\partial D)$ принадлежит $\Re$.

Если области D_1, D_2 из M пересекаются по ребру e, $\partial D_1 \cap \partial D_2 = e$ то $\varphi(e)$ есть кусок каждого из соотношений: $(\varphi(\partial D_1))^*$, $(\varphi(\partial D_2))^*$, $(\varphi(\partial D_i))^* \in \Re$, $i = 1, 2$; через W^* обозначается циклическая перестановка слова W.

Через $d(D)$ обозначим число ребер в граничном цикле ∂D, меткой каждого ребра является кусок определяющего соотношения $\varphi(\partial D)$.

Очевидно, что $d(D) \geq p$. Область D является граничной в M, если $\partial D \cap \partial M \neq \emptyset$.

Граничная область D называется простой, если $\partial D \cap \partial M$ — связное множество, являющееся последовательной частью границы ∂M.

Вершина, ребро или область из M, не являющиеся граничными, называются внутренними.

Через $i(D)$ обозначим число внутренних ребер области D.

Определим граничные ребра диаграммы M следующим образом:

Разобъём ∂M на отрезки, высекаемые на ней граничными областями.

Меткой каждого из этих отрезков является подслово $\varphi(\partial M \cap \partial D)$ определяющего соотношения $\varphi(\partial D)$, которое представляем в виде произведения минимального числа кусков, поставим в соответствие им ребра пути $\partial M \cap \partial D$, получим разбиения ∂M на ребра, связное с множеством $\Re$. Через $|\partial M|$ — будем обозначать число ребер в граничном цикле ∂M. Если ℓ произвольный путь в M, то через $|\ell|$ — будем обозначать число ребер в ℓ, через $\|\varphi(\partial M)\|$ — число равное $|\partial M|$ и назовем его слоговой длиной граничного цикла диаграммы M.

Пусть $W = 1$ в G, $G = \langle a_i,\, i = \overline{1,n} | \Re \rangle$, W — циклически несократимое слово в свободной группе $F = \langle a_i,\, i = \overline{1,n} \rangle$ и пусть $W = 1$ в G. Тогда на основании теоремы ван Кампена [3] существует связная односвязная диаграмма M над $\Re$ с граничной меткой W.

§1. Пусть $G = \langle a_i,\, i = \overline{1,n} | R_j,\, j = \overline{1,m} \rangle$ конечно определенная группа, $\Re = \{R_j,\, j = \overline{1,m}\}$ — симметризованное множество, удовлетворяющее условию $C(6)$.

Определение 1. *[5]. Граничная область D в диаграмме M называется* *деновской, если*

а) $\partial D \cap \partial M$ - связное множество, является последовательной частью границы ∂M;

б) $i(D) \in \{0, 1, 2\}$.

Определение 2. *[5]. Поддиаграмма $\prod = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$ диаграммы M называется полосой, если*

i) множество $\partial D_i \cap \partial M, i = \overline{1, n}$, связано и является последовательной частью границы ∂M;

ii) множество $\partial \prod \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы ∂M;

iii) $i(D_1) = i(D_k) = 3$;

iv) при $k > 2$, $i(D_j) = 4$, $j = 2, 3, \dots, k-1$;

v) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ — ребро, $i = 1, 2, \dots, k-1$;

vi) $\partial D_i \cap \partial D_j = \emptyset$ при $|i - j| > 1$.

Лемма 1. *[5] Если связная односвязная диаграмма M над $\Re$, $\Re$ — симметризованное множество с условием $C(6)$, не содержащий деновских областей, то она содержит минимум три непересекающиеся полосы.*

Лемма 2. *Пусть M связная односвязная приведенная диаграмма над $\Re = \{R_i,\, i = \overline{1, m}\}$, $\Re$ — симметризованное множество, удовлетворяющее условию $C(6)$ и содержащее более одной области. Тогда слоговая длина граничного цикла ∂M диаграммы M больше слоговой длины граничного цикла любой области D из M.*

Доказательство. Если M состоит из двух областей, то утверждение леммы очевидно. Допустим, что M гомеоморфно кругу и утверждение леммы справедливо для любого k, где k — число областей диаграммы M, $1 < k \leq r - 1$. Пусть M содержит r-областей.

Для граничных областей диаграммы M, удовлетворяющих условию $C(6)$, пересечение которых с ∂M есть связное множество, являющееся последовательной частью в ∂M, имеет место неравенство [3]:

$$\sum_{M}^{*} = (4 - i(D)) \geq 6 \tag{2}$$

Пусть M содержит деновскую область D_1. Тогда $i(D_1) \in \{0, 1, 2\}$.

Допустим, что $i(D_1) = 0$. Так как M содержит более одной области, то удалив область D_1, получим диаграмму M_1, слоговая длина ∂M_1 больше слоговой длины любой области из D из M_1, поэтому $|\partial D_1| < |\partial M|$ и в данной случае лемма справедлива.

Пусть $i(D_1) = 1$ либо $i(D_1) = 2$. Из неравенства (2) следует, что M может содержать деновскую область D_2 с $i(D_2) = 1$ либо $i(D_2) = 2$. Так как $d(D_1) \geq 6$, $d(D_2) \geq 6$, то $|\partial D_2 \cap \partial M| \geq 4$, поэтому $|\partial D_1| < |\partial M|$. Удалим из M область D_1, получим диаграмму M_1, для которой в силу индуктивного предположения справедливо утверждение леммы. Поэтому из неравенства: $|\partial M_1| < |\partial M|$ следует, что для любой области $D \in M$: $|\partial D| < |\partial M|$.

Допустим, что диаграмма M содержит только одну деновскую область D_1. Тогда из неравенства (2) следует, что M содержит граничную область D_2 с $i(D_2) = 3$, так как $d(D_2) \geq 6$, и $|\partial D_2 \cap \partial M| \geq 3$, то $|\partial D_1| < |\partial M|$.

Удалив из M область D_1, получим диаграмму M_1, содержащую число областей $r - 1$. В результате свели рассматриваемый случай к предыдущему.

Пусть диаграмма M не содержит деновских областей. Тогда она содержит минимум три непересекающихся полосы (лемма 1). Рассмотрим две из них: $\prod_1 = \{D'_i,\ i = \overline{1, m_1}\}$, $\prod_2 = \{D''_i,\ i = \overline{1, m_2}\}$. Из определения полосы следует, что $i(D'_1) = 3$, $|\partial \prod_2 \cap \partial M| \geq 6$. Поэтому $|\partial D'_1| < |\partial M|$.

Удалив из M область D'_1, получим диаграмму M_1, содержащую число областей $r - 1$, и следовательно, удовлетворяющую заключению леммы. Поэтому, так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, для любой области $D \in M$ имеем $|\partial D| < |\partial M|$.

Допустим, что M состоит из нескольких компонентов K_j, $j = \overline{1, \ell}$. Каждая компонента гомеоморфна кругу. Рассмотрим произвольную компоненту, обозначим ее через K. Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_q$, $1 \leq q \leq \ell - 1$ вершины принадлежащие ∂K, из которых выходят пути γ_i, $i = \overline{1, q}$, соединяющие K соответственно с компонентами K'_i, $1 \leq i \leq q$. Если K является областью D , то $|\partial D| \leq |\partial K|$, так как некоторые ребра области D могут делиться в K точками V_j. Пусть K содержит более чем одну область. Удалим отмеченные точки V_j, $j = \overline{1, q}$, получим диаграмму K', для любой области D, которой $|\partial D| < |\partial K'|$, и так как $|\partial K'| \leq |\partial K|$ и M содержит более одной области, то $\forall D$, $D \in M$: $|\partial D| < |\partial M|$. Лемма доказана.

Определение 3. *Пусть $G = \langle X | \mathfrak{R} \rangle$, где $\mathfrak{R} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ – симметризованное множество определяющих соотношений группы G. Обозначим через $K(\mathfrak{R})$ – множество всевозможных кусков соотношений $\mathfrak{R}$.*

Пусть $G = \langle a_1, \ldots, a_n; \mathfrak{R} \rangle$, где $\mathfrak{R} = \{R_1, \ldots, R_m\}$ – симметризованное множество определяющих соотношений и $H = \langle a_1, \ldots, a_n; \mathfrak{F} \rangle$, где $\mathfrak{F} = \{S_1, S_2, \ldots, S_p\}$ – симметризованное множество определяющих соотношений.

Теорема 4. *Пусть G и H группы заданные в одном алфавите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ симметризованным множеством, соответственно, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{F}$ определяющих соотношений, удовлетворяющих условию $C(6)$ и пусть отображение $\varphi : a_i \to a_i$, $i = \overline{1, n}$, определяет изоморфизм группы G на H.*

Тогда $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$, если и только если $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$, то отображение $\varphi : a_i \to a_i$, $i = \overline{1, n}$, очевидно является изоморфизмом группы G на H и $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$.

Пусть $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$ и отображение $\varphi : a_i \to a_i$, $i = \overline{1, n}$ может быть продолжено до изоморфизма φ^* групп G на H. Покажем, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$.

Введем обозначения: $Z = \mathfrak{R} \bigcap \mathfrak{F}$, $T_1 = \mathfrak{R} \backslash Z$, $T_2 = \mathfrak{F} \backslash Z$. Очевидно, что каждое из этих множеств является симметризованным.

Каждое из определяющих соотношений $R_i \in \mathfrak{R}$ группы G при изоморфизме $\varphi^* : a_i \to a_i$, $i = \overline{1, n}$ в группе H является словом равным единице; каждое определяющие соотношение $S_j \in \mathfrak{F}$ группы H в группе G также является словом равным единице в данной группе.

Поэтому каждому соотношению $R_i \in T_1$ по теореме ван Кампена [3] соответствует диаграмма $M_{R_i}(\mathfrak{F})$ над $\mathfrak{F}$ с граничной меткой $\varphi(\partial M_{R_i}(\mathfrak{F}))$ равной R_i со слоговой длинной $||\partial M_{R_i}(\mathfrak{F})||$ с метками из $\mathfrak{F}$.

Аналогично, каждому $S_j \in T_2$ в группе G соответствует диаграмма $M_{S_j}(\mathfrak{R})$ над $\mathfrak{R}$ с граничной меткой $\varphi(\partial M_{S_j}(\mathfrak{R})) = S_j$, имеющей слоговую длину $||\partial M_{S_j}(\mathfrak{R})||$ с метками из $\mathfrak{R}$.

Выбираем в множестве $T_1 \bigcup T_2$ соотношение наименьшей слоговой длинны. Пусть это будет R, $M_R(\mathfrak{F})$ – диаграмма, соответствующая R в H.

Рассмотрим случай (а), когда $|\partial R| = |\partial M_R(\mathfrak{F})|$.

Очевидно, что $M_R(\mathfrak{F})$ содержит более одной области с метками из $\mathfrak{F}$, так как, в противном случае, существует $S_j \in \mathfrak{F}$ такое, что $R = S_j$. Однако это невозможно ввиду того, что в этом случае $R \in Z$.

Пусть $M_R(\mathfrak{F})$ содержит области $D_1^{‘}, D_2^{‘}, \ldots, D_p^{‘}$, $p > 1$, соответственно с метками $\varphi(D_j^{‘}) = S_j$, $1 \leq j \leq p$, $S_j \in \mathfrak{F}$. Из леммы 2 следует, что $\forall j, |\partial D_j^{‘}| < |\partial M_R(\mathfrak{F})|$, поэтому слоговая длина каждого из соотношений S_j, является меткой области $D_j^{‘}$, $D_j^{‘} \in M_R(\mathfrak{F})$ меньше слоговой длины R. поэтому эти соотношения принадлежат Z, а следовательно множеству $\mathfrak{R}$. Так как $M_R(\mathfrak{F})$ – связанная односвязанная диаграмма, то она содержит либо деновскую область $D_0^{‘}$ с $|\partial D_0^{‘} \bigcap \partial M(\mathfrak{F})| \geqslant 4$, либо минимум три непересекающиеся полосы (лемма 1) с областями $D_1^{‘}$, $D_2^{‘}$, $D_3^{‘}$, $D_4^{‘}$, $D_5^{‘}$, $D_6^{‘}$ с $i(D_j^{‘}) = 3$ и $|\partial D_j^{‘} \bigcap \partial M_R(\mathfrak{F})| \geqslant 3$ и так как $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$, то $\varphi(D_j^{‘}) = R_S$, $0 \leq S \leq 6$, и $R_S \in \mathfrak{R}$. Получим, что каждое из соотношений R_S, $0 \leq S \leq 6$, имеет пересечение с сотношением R не менее чем по трем кускам, что невозможно. Поэтому $R \in Z$.

Случай (б). $|\partial R| \leq |\partial M_R(\mathfrak{F})|$. Разбиение R в H содержит больше кусков чем в G. Пусть $M_R(\mathfrak{F})$ содержит деновскую область $D_0^{‘}$, $\varphi(D_0^{‘}) = S_0 \in \mathfrak{F}$. Если $iD_0^{‘} \in \{0, 1, 2\}$, то из соотношения (2) следует, что $M_R(\mathfrak{F})$ содержит либо деновскую область $D^{‘}$ с $i(D^{‘}) \in \{0, 1, 2\}$, либо, по меньшей мере две области $D^{“}$, $D^{‘‘‘}$ с $i(D^{“} = 3)$ и $i(D^{‘‘‘} = 3)$. Так как $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$, то область $D_0^{‘}$ пересекается с шестью кусками R, если $i(D_0) = 0$, с пятью кусками R, если $i(D_0) = 1$ и с четырьмя куски R, если $i(D_0) = 2$. Аналогично имеем, если $D^{‘}$ – деновская. В случае, когда $D^{“}$ и $D^{‘‘‘}$ области с $i(D) = 3$, каждая из них пересекается с тремя кусками M_R. В результате слоговая длина $\varphi(D_0^{‘})$ меньше слоговой длины R. Следовательно соотношение S_0, является меткой $D_0^{‘}$, принадлежащей Z и $S_0 = R_0 \in \mathfrak{R}$. Получим, что R и R_0 имеет общее пересечение, содержащие более одного куска, что невозможно. Поэтому $R_0 = R$ и $R \in Z$.

Если диаграмма $M_R(\mathfrak{F})$ не содержит деновских областей, то согласно лемме 1, $M_R(\mathfrak{F})$ содержит минимум три непересекающиеся полосы, а следовательно минимум шесть областей $D_1^{\text{‘}}, D_2^{\text{‘}}, \dots, D_6^{\text{‘}}$ с $i(D_j^{\text{‘}}) = 3$ $j = \overline{1, n}$. но каждая из них пересекается минимум по трем кускам с соотношением R. Поэтому слоговая длина $\varphi(D_1^{\text{‘}})$ меньше слоговой длины R и следовательно принадлежит Z. Получили выше рассмотренный случай. Теорема доказана.

Пример 1.

Рассмотрим группу G с системой образующих:

$$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6,\ \ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6,\ \ c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6,\ \ t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$$

и с системой определяющих соотношений $\mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} R_0 &= c_1b_1a_1c_6b_6a_6c_5b_5a_5c_4b_4a_4c_3b_3a_3c_2b_2a_2,\\ R_1 &= t_1a_1b_2c_1t_6^{-1}a_1^{-1}b_1^{-1}c_1^{-1},\\ R_2 &= t_6a_6b_3c_6t_5^{-1}a_6^{-1}b_6^{-1}c_6^{-1},\\ R_3 &= t_5a_5b_6c_5t_4^{-1}a_5^{-1}b_5^{-1}c_5^{-1},\\ R_4 &= t_4a_4b_5c_4t_3^{-1}a_4^{-1}b_4^{-1}c_4^{-1},\\ R_5 &= t_3a_3b_4c_3t_2^{-1}a_3^{-1}b_3^{-1}c_3^{-1},\\ R_6 &= t_2a_2b_1c_2t_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}c_2^{-1}; \end{aligned}$$

и группу H с системой образующих X и системой определяющих соотношений $\mathfrak{F}$:

$$R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, S_0,$$

где

$$S_0 = a_1b_2c_1a_6b_3c_6a_5b_6c_5a_4b_5c_4a_3b_4c_3a_2b_1c_2.$$

Определяющие соотношения G и H удовлетворяют условию $C(6)$, данные группы изоморфны по отображению $\varphi : a_i \to a_i$, $b_i \to b_i$ $c_i \to c_i$ $t_i \to t_i$, $i = \overline{1, 6}$, но $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{F}$. Не выполняется условие теоремы 4: $K(\mathfrak{R}) \neq K(\mathfrak{F})$.

§2. Пусть $G = \langle a_i,\, i = \overline{1, n} | \mathfrak{R} \rangle$ конечно определенная группа, $\mathfrak{R} = \{R_i,\, i = \overline{1, m}\}$, $\mathfrak{R}$ — симметризованное множество, удовлетворяющее условиям $C(4)$ и $T(4)$. Рассмотрим диаграммы над $\mathfrak{R}$, удовлетворяющих условиям $C(4)$ и $T(4)$.

Определение 4. *[5]. Граничная область D диаграммы M называется деновской, если*

а) $\partial D \cap \partial M$ - связное множество, являются последовательной частью границы ∂M;

б) $i(D) \in \{0, 1\}$.

Определение 5. *[5]. Поддиаграмма* $\prod = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ *диаграммы* M *называется полосой, если*

i) множество $\partial \prod \cap \partial M$, *связно и является последовательной частью границы* ∂M;

ii) множество $\partial D_j \cap \partial M$ *связно и является последовательной частью границы* ∂M, $1 \leq j \leq n$;

iii) $i(D_1) = i(D_n) = 2$;

iv) при $n > 2$, $i(D_j) = 3$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$;

v) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ *— ребро,* $i = 1, 2, \ldots, n-1$;

vi) $\partial D_i \cap \partial D_j = \emptyset$ *при* $|i - j| > 1.$ *;*

Лемма 3. *[5] Если связная односвязная диаграмма* M *над* $\Re$, $\Re$ *— симметризованное множество с условиями* $C(4)$ *и* $T(4)$, *не содержащий деновских областей, то она содержит минимум две непересекающиеся полосы.*

Лемма 4. *Пусть* M *связаная односвязанная приведенная диаграмма над* $\Re = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$, $\Re$ *- симметризованное множество, удовлетворяющее условиям* $C(4)$ *и* $T(4)$ *и содержащее более одной области. Тогда слоговая длина граничного цикла* M *больше слоговой длины граничного цикла любой области* D *из* M.

Доказательство. Пусть M связная односвязная приведенная диаграмма, состоящая из двух областей. Тогда утверждения леммы справедливо.

Допустим, что M гомеоморфно кругу и утверждение леммы справедливо для любого числа k, где k—число областей диаграммы M, $2 \leq k \leq r-1$. Пусть M содержит r областей.

Для граничных областей диаграммы M, удовлетворяющей условиями $C(4)$ и $T(4)$, пересечение которых с ∂M есть связное множество, являющееся последовательной частью в ∂M, имеет место неравенство [3]:

$$\sum_{M}^{*} (3 - i(D)) \geq 4 \tag{3}$$

Пусть M содержит деновскую область D_1, $i(D_1) = 0$. Так как M содержит более одной области, то удалив из M область D_1, получим диаграмму M_1, слоговая длина ∂M_1 которой больше слоговой длины любой области из M_1. Отсюда следует, что для любой области $D \in M$, $|\partial D| < |\partial M|$.

Пусть $i(D_1) = 1$ и допустим, что D_2 тоже деновская область с $i(D_2) = 1$. Так как $d(D_1) \geq 4$ и $d(D_2) \geq 4$ и $|\partial D_2 \cap \partial M| \geq 3$, то $|\partial D_1| < |\partial M|$. Удалим область D_1 из M получим диаграмму M_1 с числом областей $r-1$, которая удовлетворяет индуктивному предположению, поэтому для любой области $D \in M_1$, $|\partial D| < |\partial M_1|$, и так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, в данном случае утверждение леммы справедливо.

Допустим, что D_1 единственная деновская область в M, тогда в силу неравенства (3) диаграмма M содержит граничную область D_2 с $i(D_2) = 2$ и $|\partial D_2 \cap \partial M| \geq 2$. Поэтому $|\partial D_1| < |\partial M|$.

Удалив из M область D_1, получим диаграмму M_1 с числом областей $r - 1$. Поэтому в силу индуктивного предположения $\forall D$, $D \in M_1$, $|\partial D| < |\partial M_1|$. Так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, то для любой области $D \in M$, $|\partial D| < |\partial M|$.

Пусть диаграмма M не содержит деновских областей. Тогда она содержит минимум две непересекающиеся полосы

$$\Pi_1 = \bigcup_{j=1}^{S_1} D'_j \quad \text{и} \quad \Pi_2 = \bigcup_{j=1}^{S_2} D''_j.$$

Из определения полосы, следует что $i(D'_1) = i(D'_{S_1}) = i(D''_1) = i(D''_{S_2}) = 2$. Поэтому $|\partial D'_1| < |\partial M|$. Удалив из M область D'_1, получим диаграмму M_1, удовлетворяющую индуктивному предположению. Так как $|\partial M_1| \leq |\partial M|$, то для любой области $D \in M$, $|\partial D| < |\partial M|$.

Если допустить, что M состоит из нескольких компонент, то рассуждая в этом случае также, как в аналогичном случае при доказательстве леммы 2, убеждаемся в справедливости леммы 4.

Заметим, что лемма 4 справедлива для случаев, когда множество определяющих соотношений удовлетворяет условиям $C(5)$ и $T(4)$ либо $C(4)$ и $T(5)$.

Теорема 5. *Пусть G и H – группы заданные в одном алфавите $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ симметризованными множествами $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{F}$ определяющих соотношений, удовлетворяющих условиям $C(4)$ и $T(4)$ и пусть отображение $\varphi : a_i \to a_i$, $i = \overline{1, n}$, определяет изоморфизм группы G на H. Тогда $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$, если и только если $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{R}$=$\mathfrak{F}$, то отображение $\varphi : a_i \to a_i$, $i = \overline{1, n}$ является изоморфизмом групп G и H и $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$.

Пусть $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$ и отображение $\varphi : a_i \to a_i$, $i = \overline{1, n}$ может быть продолжено до изоморфизма φ^* группы G на H. Покажем, что $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}$. Как и в теореме 4, обозначим $Z = \mathfrak{R} \bigcap \mathfrak{F}$, $T_1 = \mathfrak{R} \backslash Z$, $T_2 = \mathfrak{F} \backslash Z$.

Выбираем в множестве $T_1 \bigcup T_2$ соотношение наименьшей слоговой длины. Путсь это будет $R \in \mathfrak{R}$, $M_R(\mathfrak{F})$ – диаграмма, соответствующая R в H.

Рассмотрим как и в теореме 4 случай (a), когда $|\partial R| = |\partial M_R(\mathfrak{F})|$. Если $M_R(\mathfrak{F})$ содержит одну область $S_j \in \mathfrak{F}$, то получаем, что $R = S_j$, то есть $R \in Z$, чего быть не может.

Пусть $M_R(\mathfrak{F})$ содержит области $\{D^{‘}_i\}$, $i = \overline{1, p}$, $p > 1$, соответственно с метками $\varphi(D^{‘}_j) = S_j$, $j = \overline{1, p}$, $S_j \in \mathfrak{F}$. из леммы 4 следует, что $\forall j, |\partial D^{‘}_j| < |\partial M_R(\mathfrak{F})|$, поэтому слоговая длина S_j, $1 \leq j \leq p$ меньше слоговой длины R и следовательно $S_j \in Z$, а значит $\mathfrak{R}$. $M_R(\mathfrak{F})$ – связанная односвязанная диаграмма, тогда она содержит либо деневскую область $D^{‘}_0$ с $|\partial D^{‘}_0 \bigcap \partial M(\mathfrak{F})| \geqslant 3$, либо минимум две непересекающиеся полосы (лемма 3) с областями $D_1^{‘}$, $D_2^{‘}$, $D_3^{‘}$, $D_4^{‘}$ с $i(D_j^{‘}) = 2$, $1 \leq j \leq 4$, и $|\partial D_j^{‘} \bigcap \partial M_R(\mathfrak{F})| \geqslant 2$.

Так как $|\partial R| = |\partial M_R(\mathfrak{F})|$ и $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$, то $\varphi(D_S^{‘}) = R_S$, $0 \leq S \leq 4$, $R_S \in \mathfrak{R}$. Получим, что каждые из соотношений R_S, $0 \leq S \leq 4$ пересекаются с R менее чем по двум кускам, что невозможно. Поэтому $R \in Z$.

Рассмотрим случай (б). $|R| < |M_R(\mathfrak{F})|$. Разбиение R в H содержит больше кусков чем в G.

Пусть $M_R(\mathfrak{F})$ содержит деневскую область $D_0^{‘}$, $\varphi(D_0^{‘}) = S_0 \in \mathfrak{F}$. Если $i(D_0^{‘}) \in \{0, 1\}$, то из соотношения (3) следует, что $M_R(\mathfrak{F})$ содержит либо деневскую область $D^{‘}$ с $i(D^{‘}) \in \{0, 1\}$, либо, по меньшей мере, одну область $D^{“}$ с $i(D^{“} = 2)$. Так как $K(\mathfrak{R}) = K(\mathfrak{F})$, то область $D_0^{‘}$ пересекается с четырьмя кусками R, если $i(D_0^{‘}) = 0$, с тремя кусками R, если $i(D_0^{‘}) = 1$. Если $M_R(\mathfrak{F})$ содержит еще одну деневскую область $D_1^{‘}$, то слоговая длина S_0 меньше $||R||$, поэтому $S_0 \in Z$ и $S_0 \in R$. Если кроме $D_0^{‘}$ $M_R(\mathfrak{F})$ содержит область $D^{“}$ с $i(D^{“}) = 2$, $\varphi(D^{“}) = S^{“} \in F$, то $S^{“}$ пересекается с R минимум по двум кускам. Поэтому $S_0 = \varphi(D_0^{‘})$ имеет слоговую длину меньше слоговой длины R, поэтому $S_0 \in Z$ и следовательно $S_0 \in \mathfrak{R}$, $S_0 = R_0$. Но тогда R и R_0 имеют общее пересечение, содержащие более одного куска что невозможно. Поэтому $R_0 = R$ и $R = Z$.

Если диаграмма $M_R(\mathfrak{F})$ не содержит деневской областей, то согласно лемме 3, $M_R(\mathfrak{F})$ содержит минимум две непересекающиеся полосы, а следовательно, минимум четыре области $D_1^{‘}$, $D_2^{‘}$, $D_3^{‘}$, $D_4^{‘}$ с $i(D_j^{‘}) = 2$, $1 \leq j \leq 4$, $\varphi(D_j^{‘}) = S_j$, $S_j \in \mathfrak{F}$, каждая из которых пересекается с R минимум по двум кускам. Поэтому слоговая длина $\varphi(D_1^{‘})$ меньше слоговой длины R и следовательно принадлежит Z. Получили ранее рассматриваемый случай.

Теорема доказана.

Пример 2.

Рассмотрим группу G с системой образующих:

$$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4,\ \ b_1, b_2, b_3, b_4,\ \ c_1, c_2, c_3, c_4\}$$

и с системой определяющих соотношений $\mathfrak{R}$:

$$\begin{aligned} R_0 &= c_3 b_3 a_3 c_2 b_2 a_2 c_1 b_1 a_1 c_4 b_4 a_4, \\ R_1 &= a_4 b_3 c_4 a_3^{-1} b_3^{-1} c_3^{-1}, \\ R_2 &= a_3 b_2 c_3 a_2^{-1} b_2^{-1} c_2^{-1}, \\ R_3 &= a_2 b_1 c_2 a_1^{-1} b_1^{-1} c_1^{-1}, \\ R_4 &= a_1 b_4 c_1 a_4^{-1} b_4^{-1} c_4^{-1}; \end{aligned}$$

и группу H с системой образующих X и системой определяющих соотношений $\mathfrak{F}$:

$$R_1, R_2, R_3, R_4, S_0,$$

где
$$S_0 = a_4b_3c_4a_3b_2c_3a_2b_1c_2a_1b_4c_1.$$

Определяющие соотношения G и H удовлетворяют условию $C(4)$ и $T(4)$. Данные группы изоморфны по отображению $\varphi : a_i \to a_i$, $b_i \to b_i$, $c_i \to c_i$, $i = \overline{1,3}$, но $\mathfrak{R} \neq \mathfrak{F}$. Не выполняется условие теоремы 5: $K(\mathfrak{R}) \neq K(\mathfrak{F})$.

Теорема 5 справедлива для случаев, когда системы определяющих соотношений группы G и H одновременно удовлетворяют условиям $C(4)$ и $T(5)$ или $C(5)$ и $T(4)$.

§3. Пусть $G = \langle a_i,\, i = \overline{1,n} | \mathfrak{R}\rangle$ —конечно определенная группа, $\mathfrak{R} = \{R_i,\, i = \overline{1,m}\}$ — симметризованное множество, удовлетворяющее условиям $C(3)$ и $T(6)$.

В данном параграфе рассматриваем диаграммы над $\mathfrak{R}$, удовлетворяющих условиям $C(3)$ и $T(6)$.

Определение 6. *[5]. Граничная область D в диаграмме M называется деновской, если*

а) $\partial D \cap \partial M$ - связное множество, являются последовательной частью границы ∂M;

б) $i(D) \in \{0, 1\}$.

Определение 7. *[5]. Полосой в диаграмме M называется поддиаграмма $\prod = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$, если*

i) множество $\partial \prod \cap \partial M$ — связно и является последовательной частью граничного цикла ∂M;

ii) множество $\partial D_i \cap \partial M$ связно и является последовательной частью в граничном цикле;

iii) при $k = 3$, $i(D_1) = i(D_2) = i(D_3) = 2$ причем соседние области пересекаются по ребру, и все три области имеют общую вершину;

iv) при $k > 3$, $k = 2\ell + 1$, $i(D_1) = i(D_2) = i(D_{2\ell}) = i(D_{2\ell+1}) = 2$, $i(D_3) = i(D_5) = \ldots = i(D_{2\ell-3}) = 3$, $i(D_4) = i(D_6) = \ldots = i(D_{2\ell-2}) = 2$;

v) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ — ребро, $i = 1, 2, \ldots, k-1$;

vi) $\partial D_i \cap \partial D_j$ при $|i - j| > 1$.

Лемма 5. *[5] Если связная односвязная диаграмма M над $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ — симметризованное множество с условиями $C(3)$ и $T(6)$, не содержащий деновских областей, то она содержит минимум две непересекающиеся полосы.*

Лемма 6. *. Пусть M связанная односвязанная приведенная диаграмма над $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ — симметризованное множество, удовлетворяющее условиям $C(3)$ и $T(6)$ и содержащее более одной области. Тогда слоговая длина граничного цикла M больше слоговой длины граничного цикла любой области D из M.*

Доказательство. Допустим, что утверждение справедливо для любого k, $2 \leq k \leq r - 1$, докажем лемму для $k = r$. Пусть M гомеоморфна кругу и M содержит r областей.

Для граничных областей диаграммы M, удовлетворяющей условиям $C(3)$ и $T(6)$, пересечение которых с ∂M есть связное множество, являющееся последовательной частью в ∂M, имеет место неравенство из [3]:

$$\sum_M^* = (\frac{5}{2} - i(D)) \geq 3 \tag{4}$$

Пусть M содержит деновскую область D, $i(D_1) \in \{0,1\}$. Если $i(D_1) = 0$, то утверждение леммы справедливо.

Пусть $i(D_1) = 1$ и пусть D_2 тоже деновская область с $i(D_2) = 1$. Так как $d(D_1) \geq 3$, $d(D_2) \geq 3$,, то $|\partial D_1| < |\partial M|$. Удалив из M область D_1, получим диаграмму M_1, для которой в силу индуктивного предположения для любой области $D \in M_1$ имеем $|\partial D| < |\partial M_1|$; и так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, то любой области $D \in M$, имеем $|\partial D| < |\partial M|$.

Допустим, что D_1 единственная деновская область в M. Из неравенства (4) следует, что M должна содержать граничные области D_2, D_3, пересечение которых с ∂M связное множество и $i(D_2) = i(D_3) = 2$. Так как $d(D_2) \geq 3$, $d(D_3) \geq 3$, то $|\partial D_1| < |\partial M|$. Удалив из M область D_1, получим диаграмму M_1, с числом областей $k = r - 1$, для которой в силу индуктивного предположения для любой области $D \in M_1$ имеем $|\partial D| < |\partial M_1|$. Но тогда, так как $|\partial M_1| < |\partial M|$, получаем, что для любой области $D \in M$: $|\partial D| < |\partial M|$.

Пусть M не содержит деновских областей. Тогда она содержит минимум две непересекающихся полосы $\prod_1$, $\prod_2$. Пусть, к примеру, это будут полосы $\prod_1 = \{D_1', D_2', \ldots, D_{2p+1}'\}$ и $\prod_2 = \{D_1'', D''_2, \ldots, D_{2p'+1}''\}$, $i(D_1') = i(D_2') = 2$, $d(D_1') \geq 3$, $d(D_2') \geq 3$ и $|\partial \prod_2 \cap \partial M| \geq 3$, поэтому $|\partial D_1'| < |\partial M|$ и $|\partial D_2'| < |\partial M|$. Удалим из M области D_1', D_2', получим диаграмму M_1, содержащую не менее четырех областей, поэтому для нее в силу индуктивного предположения для любой области $D \in M_1$ имеем $|\partial D| < |\partial M_1|$. Так как $|\partial M_1| \leq |\partial M|$, то для любой области $D \in M$ имеем $|\partial D| < |\partial M|$.

Если допустить, что M состоит из нескольких компонент, то нетрудно видеть, что в данном случае утверждения леммы справедливо.

В [6] доказано, что если $G =< X; \Re >$ с условием $C(p)\&T(q)$ при $q > 4$, то длина любого куска равна 1.

Теорема 6. *. Пусть G и H — группы, заданные в одном алфавите $a_1, a_2, \ldots, a_n$, симметризованным множеством $\Re$ и $\Im$ определяющих соотношений соответственно, удовлетворяющих условиям $C(3)$ и $T(6)$. Тогда отображение $a_i \to a_i$, $i = \overline{1,n}$, определяет изоморфизм группы G на группу H в том и только в том случае, когда $\Re = \Im$.*

Доказательство. Если $\Re = \Im$, то отображение $a_i \to a_i$, $i = \overline{1,n}$ определяет тождественный изоморфизм G на H.

Пусть $\Re \neq \Im$. Введем обозначения: $Z = \Re \cap \Im$, $T_1 = \Re / Z$, $T_2 = \Im / Z$. Очевидно, что каждое из этих множеств является симметризованным.

Каждое из определяющих соотношений $R_i \in \Re$ группы G при тождественном изоморфизме $a_i \to a_i$, $i = \overline{1,n}$ является словом равным единице в группе H, и наоборот, каждое определяющее соотношение $S_j \in \Im$ группы H при тождественном изоморфизме H на G в группе G является словом равным единице. Поэтому каждому определяющему соотношению $R_i \in T_1$ соответствует приведенная диаграмма M_{R_i} над $\Im$ с граничной меткой $\varphi(\partial M_{R_i})$ равной R_i со слоговой длиной $|M_{R_i}|$ и с метками из $\Im$.

Упорядочим R_i, $R_i \in T_1$ по слоговым длинам, то есть, упорядочим диаграммы M_{R_i} по слоговым длинам их граничных меток.

Аналогично, каждому $S_j \in T_2$ в группе G соответствует диаграмма M_{S_j} над $\Re$ с граничной меткой $\varphi(\partial M_{S_j})$ равной S_j, имеющей слоговую длину $|\partial M_{S_j}|$ с метками из $\Re$. Упорядочим $S_j \in T_2$ по слоговым длинам.

Выбираем в множестве $T_1 \cup T_2$ определяющее соотношение (диаграмму) наименьшей слоговой длины. Пусть это будет $R \in T_1$, являющееся граничной меткой диаграммы M_R над $\Im$.

Очевидно, что M_R содержит более одной области. Пусть M_R содержит области $D_1, D_2, \ldots, D_\ell$, $\ell > 1$, соответственно с метками $\varphi(D_j) = S_j$, $1 \le j \le \ell$, $S_j \in \Im$. Из леммы 6 следует, что для $\forall j$, $|\partial D_j| < |\partial M_R|$, поэтому слоговая длина каждого из соотношений S_j (разбиения на слоги рассматривается над $\Im$), являющегося меткой D_j, $D_j \in M_R$, меньше слоговой длины M_R с метками над $\Im$. Поэтому эти соотношения принадлежат Z, то есть множеству $\Re$. Рассмотрим разбиение каждой области $D_j \in M_R$, $1 \le j \le \ell$, на ребра с метками из $\Re$. В результате получим разбиение граничного цикла M_R областями D_j над $\Re$. Обозначим диаграмму M_R с разбиением граничного цикла над $\Re$ через M'_R. Так как M'_R — связная односвязная диаграмма, то она содержит либо деновскую область D_1, $|\partial D_1 \cap \partial M'_R| \ge 2$, либо минимум две полосы.

В первом случае метка пересечения D_1 должна быть куском, так как $\varphi(\partial D_1) = R_1$, $R_1 \in \Re$ и $\varphi(\partial M'_R) = R$, $R \in \Re$, однако это противоречит тому, что $|\partial D_1 \cap \partial M'_R| \ge 2$. Допустим, что M'_R не содержит деновских областей. Тогда M'_R содержит минимум две полосы. Пусть $\prod_1 = \{D'_1, \ldots, D'_{k'}\}$, $2 < k' < \ell$, $\prod_2 = \{D''_1, \ldots, D''_{k''}\}$, $2 < k'' < \ell$, искомые полосы из M'_R. Из определения полосы следует, что степень вершины v_1, $v_1 = (\partial D'_1 \cap \partial D'_2) \cap \partial M'_R$ и вершины v_2, $v_2 = (\partial D''_1 \cap \partial D''_2) \cap \partial M'_R$ равна трем.

Рассмотрим диаграмму M, образованную областями $\{R, D'_1, \ldots, D'_{k'}, D''_1, \ldots, D''_{k''}\}$, у которой внутренние вершины v_1, v_2, имеют степень три, что противоречит условию $T(6)$. Теорема доказана.

Из Теоремы 6 получаем следующее:

Следствие 1. . *Пусть G и H группы, заданные в одном алфавите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ симметризованным множеством определяющих соотношений $\Re$ и $\Im$ соответственно, удовлетворяющих условиям $C'(1/2)$ и $T(6)$. Тогда отображение $a_i \to a_i$, $i = \overline{1,n}$, определяет изоморфизм группы G и H в том и только в том случае, когда $\Re = \Im$.*

В [4] доказана

Теорема 7. . *Существуют две группы G и H с условиями $\lambda = 1/3$, T_4, T_5 изоморфные относительно тождественного отображения образующих, для которых $\Re \neq \Im$.*

Из данной теоремы следует:

Следствие 2. . *Существуют группы G и H заданные в одном алфавите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с симметризованным множеством определяющих соотношений $\Re$ и $\Im$ соответственно, удовлетворяющих условиям $C'(1/2)$ и T_4 и $C'(1/2)$ и T_5 изоморфные относительно отображения $a_i \to a_i$, $i = \overline{1, n}$, для которых $\Re \neq \Im$.*

Из теорем 3, 5 и [6] получаем

Следствие 3. . *Пусть G и H, заданные в одном алфавите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ симметризованным множеством определяющих соотношений $\Re$ и $\Im$ соответственно, удовлетворяющих условию $C'(1/5)$, либо $C'(1/4)$ и $T(4)$, либо $C'(1/3)$ и $T(4)$, либо $C'(1/3)$ и $T(5)$. Тогда отображение $a_i \to a_i$, $i = \overline{1, n}$ определяет изоморфизм группы G на H в том и только в том случае, когда $\Re = H$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

2. Greendlinger M. An analogue of theorem of Magnus // Archiv. Math. 1902. Vol. 12. P. 94—96.

3. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

4. Кашенцев Е. В. Аналоги одной теоремы Магнуса для групп с малым сокращением и невозможности их усиления // Математические заметки. 1985. Т. 38, № 4. С. 494—502.

5. Безверхний В. Н. О нормализаторах элементов в $C(p)\&T(q)$-группах // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 1994. С. 4—58.

6. Gersten S. M., Short H. Small cancellation theory and automatic groups // Invent. Math. 1990. Vol. 102. P. 305—334.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 18.09.2013