

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 511.3

ЛИНЕЙНЫЕ СУММЫ И ГАУССОВА ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ¹

О. В. Колпакова, В. Н. Чубариков (г. Москва)

Аннотация

Даны оценки линейных сумм с многочленом Бернулли первой степени. Если коэффициент в линейной функции является иррациональным числом с ограниченными неполными частными, то арифметическая сумма имеет “корневую” оценку. Подобную оценку дает теорема Рота для любого иррационального алгебраического числа, но при этом константы в оценках будут неэффективными. Новые трудности возникают для сумм по простым числам. Они связаны с рассмотрением билинейных форм.

Ключевые слова: арифметические суммы, теорема Гаусса умножения для Гамма-функции Эйлера, функциональное уравнение гауссова типа, многочлены Бернулли, алгебраические числа, арифметические суммы по простым числам, теорема Рота.

Библиография: 24 названия.

LINEAR SUMS AND THE GAUSSIAN MULTIPLICATION THEOREM

O. V. Kolpakova, V. N. Chubarikov (Moscow)

Аннотация

Estimations of linear sums with Bernoulli polynomial of the first degree are given. If the coefficient of the linear function is a irrational number with the bounded partial quotients, the arithmetical sum has the “squaring” estimation. The Roth’s theorem gives the similar estimation for all algebraic number, but the constants in estimations be nonefficient. New difficulties appears for sums over primes. Their are connected with the consideration of bilinear forms.

Keywords: arithmetical sums, the Gaussian multiplication theorem for the Euler’s Gamma-function, the functional theorem of the Gaussian type, the Bernoulli polynomials, algebraic numbers, arithmetical sums over primes, the Roth’s theorem.

Bibliography: 24 titles.

1. Введение

Настоящую статью авторы посвящают памяти наших учителей и друзей Геннадия Ивановича Архипова и Сергея Михайловича Воронина к семидесятилетиям со дней их рождений. Их жизненные и научные пути пересеклись в колмогоровской школе, на Механико-математическом факультете МГУ (студенческие годы), в Стекловском институте (аспирантура под руководством А. А. Карацубы в отделе теории чисел, возглавляемом И. М. Виноградовым). Конечно, связующим звеном была их любимая наука — теория чисел, и в особенности, теория дзета-функции Римана, занятиями которой они отдались со всей страстью, и здесь они трудились с полной отдачей всех своих сил.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-01-00-071

И. М. Виноградов разработал в аналитической теории чисел новый элементарный метод для изучения свойств арифметических функций. Этот метод не использует средств анализа бесконечно малых. Подобным образом в настоящей статье, насколько это возможно, используются элементарные приемы решения арифметических задач.

В основу исследования И. М. Виноградов положил функцию

$$\psi(x) = \psi_\sigma(x) = \begin{cases} 1 - \sigma, & \text{если } \{x\} < \sigma \\ -\sigma, & \text{если } \{x\} \geq \sigma, \end{cases}$$

где $0 < \sigma \leq 1$ и $0 \leq x < 1$.

Сумма $S(\sigma p)$ символов Лежандра от 1 до σp может быть представлена в виде

$$S(\sigma p) = \sum_{x < \sigma p} \left(\frac{x}{p} \right) = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p} \right) \psi_\sigma(x).$$

Положим $\sigma = N/p$. Имеем

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{p-1} d_n e^{2\pi i \frac{nx}{p}},$$

где

$$d_n = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{p-1} \psi \left(\frac{x}{p} \right) e^{2\pi i \frac{nx}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{N-1} (1 - \sigma) e^{2\pi i \frac{nx}{p}} + \frac{1}{p} \sum_{x=N}^{p-1} (-\sigma) e^{2\pi i \frac{nx}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{x=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{nx}{p}}, d_0 = 0.$$

Таким образом

$$S(N) = \sum_{n=1}^{p-1} d_n \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p} \right) e^{2\pi i \frac{nx}{p}} = \varepsilon_p \sqrt{p} \sum_{n=1}^{p-1} \left(\frac{n}{p} \right) d_n,$$

где сумма Гаусса τ равна

$$\tau = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p} \right) e^{2\pi i \frac{x}{p}} = \varepsilon_p \sqrt{p},$$

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p \equiv 1 \pmod{p}, \\ i, & \text{если } p \equiv 3 \pmod{p}. \end{cases}$$

В последнем выражении для $S(N)$ переходим к оценкам, используя при $1 \leq n < p/2$ неравенство

$$|d_n| \leq \frac{1}{2n}, \quad |d_n| = |d_{p-n}|$$

Имеем

$$|S(N)| \leq 2\sqrt{p} \sum_{n=1}^{(p-1)/2} \frac{1}{2n} < \sqrt{p} \log p.$$

Тем самым получена оценка Виноградова – Пойа.

Заметим, что $\psi_\sigma(x) = \rho(x) - \rho(x - \sigma)$, где $\rho(x) = 0, 5 - \{x\}$. Действительно,

$$\psi_\sigma(0) = 1 - \sigma = \rho(0) - \rho(-\sigma), \quad \psi_\sigma(\sigma) = -\sigma = \rho(\sigma) - \rho(0).$$

Далее, при $x \neq 0; \sigma$ находим $\psi'_\sigma(x) = \rho'(x) - \rho'(x - \sigma) = 0$.

При $x = \sigma/2$ имеем

$$\psi_\sigma(\sigma/2) = 1 - \sigma = \rho(\sigma/2) - \rho(-\sigma/2),$$

а при $x = \frac{1+\sigma}{2}$

$$\psi_\sigma\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) = -\sigma = \rho\left(\frac{1+\sigma}{2}\right) - \rho\left(\frac{1-\sigma}{2}\right),$$

что и устанавливает тождество $\psi_\sigma(x) \equiv \rho(x) - \rho(x - \sigma)$.

В настоящей работе рассматриваются арифметические суммы вида

$$S = S(N; \alpha) = \sum_{x \leq N} \rho(\alpha x),$$

где $N > 1$ — вещественное число, α — иррациональное алгебраическое число.

2. Известные леммы

Для оценки модуля таких сумм весьма полезной является известная формула умножения для многочленов Бернулли первой степени.

ЛЕММА 1. Пусть n — натуральное число, $(a, n) = 1$. Тогда для любого вещественного числа x имеем

$$\rho(nx) = \rho(x) + \rho\left(x + \frac{a}{n}\right) + \cdots + \rho\left(x + \frac{a(n-1)}{n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая и правая части равенства имеют период, равный $1/n$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho\left(n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) &= \rho(nx + 1) = \rho(nx); \\ \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{am}{n}\right) &= \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m}{n}\right), \end{aligned}$$

поскольку am пробегает полную систему вычетов по модулю n при $(a, n) = 1$, если m пробегает полную систему вычетов по модулю n ; далее

$$\sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{1}{n} + \frac{m}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m+1}{n}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m}{n}\right).$$

Поэтому достаточно доказать равенство при $0 \leq x < 1/n$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} \rho\left(x + \frac{m}{n}\right) &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - x - \frac{m}{n}\right) = \left(\frac{1}{2} - x\right)n - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m}{n} = \\ &= \left(\frac{1}{2} - x\right)n - \frac{n-1}{2} = \frac{1}{2} - nx = \rho(nx). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть α и $\tau > 1$ — вещественные числа. Тогда найдется натуральное число $q < \tau$ такое, что $\|q\alpha\| \leq \tau^{-1}$, где $\|\alpha\| = \min\{\{\alpha\}, 1 - \{\alpha\}\} = \min_{z \in \mathbf{Z}} |\alpha - z|$ — расстояние до ближайшего целого числа от α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см., например, [3], с.9, теорема 1. $\square$

Пусть p_n/q_n — n -я подходящая дробь числа α и a_n — его n -е неполное частное.

ЛЕММА 3. Пусть $0 < \alpha < 1$. Тогда $1 \geq q_{n+1}\|q_n\alpha\| > 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. см., например, [3], с.16, формула (16). $\square$

3. Основные утверждения

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N \geq 1$ — натуральное число, α — иррациональное число с ограниченными величиной $c > 0$ неполными частными. Тогда справедлива оценка

$$S(N; \alpha) \ll \sqrt{N},$$

где положительная постоянная в знаке $\ll$ зависит только от c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого натурального числа N найдется номер n такой, что $q_n < \sqrt{N} \leq q_{n+1}$. Так как α — число с ограниченными неполными частными, то из леммы 2 при $\tau = \sqrt{N}$ и леммы 3 следует, что существует натуральное число q с условиями $\sqrt{N}/(c+1) \leq q < \sqrt{N}$ такое, что $q \|\alpha q\| \leq 1$. Следовательно,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, (a, q) = 1, |\theta| \leq 1.$$

Пусть, сначала, $\theta > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} S(N; \alpha) &= \sum_{k=0}^{[N/q]-1} \sum_{y=0}^{q-1} \rho((qk+y)\alpha) + \sum_{y=0}^{N-q[N/q]} \rho((q[N/q]+y)\alpha) = \\ &= \sum_{k=0}^{[N/q]-1} \sum_{y=0}^{q-1} \rho\left((qk+y)\left(\frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}\right)\right) + \sum_{y=0}^{N-q[N/q]} \rho\left((q[N/q]+y)\left(\frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}\right)\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{[N/q]-1} \sum_{y=0}^{q-1} \rho\left(\frac{ay}{q} + (qk+y)\frac{\theta}{q^2}\right) + \sum_{y=0}^{N-q[N/q]} \rho\left(\frac{ay}{q} + (q[N/q]+y)\frac{\theta}{q^2}\right). \end{aligned}$$

Поскольку функция $\rho(x)$ непрерывна справа, при $0 \leq z < \frac{1}{q}$ и при $0 \leq y < q$ имеем

$$\rho\left(\frac{ay}{q} + z\right) = \rho\left(\frac{ay}{q}\right) + z.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} S(N; \alpha) &= \sum_{k=0}^{[N/q]-1} \sum_{y=0}^{q-1} \left(\rho\left(\frac{ay}{q}\right) + (qk+y)\frac{\theta}{q^2} \right) + \sum_{y=0}^{N-q[N/q]} \left(\rho\left(\frac{ay}{q}\right) + (q[N/q]+y)\frac{\theta}{q^2} \right) \leq \\ &\leq \frac{N}{2q} + q \ll \sqrt{N}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана. $\square$

Для дальнейшего нам необходима следующее утверждение (теорема Рота [4]; см. также [3], с.128).

ЛЕММА 4. Пусть α — иррациональное алгебраическое число. Тогда существует только конечное число пар (p, q) целых взаимно простых чисел $p, q \geq 1$, таких, что

$$|\alpha - p/q| < q^{-2-\delta},$$

где $\delta > 0$ — сколь угодно малая постоянная.

В частности, из леммы 4 находим, что для любого иррационального алгебраического числа α натуральное число q из леммы 2 удовлетворяет неравенству $\tau^{1/(1-\delta)} \ll q < \tau$, где положительная постоянная в знаке $\ll$ зависит только от δ .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N \geq 1$ — натуральное число, α — иррациональное алгебраическое число. Тогда при $N \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$S(N; \alpha) \ll N^{\frac{1}{2} + \delta},$$

где $\delta > 0$ — сколь угодно малая постоянная и положительная постоянная в знаке $\ll$ зависит только от δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 с заменой утверждения о знаменателях подходящих дробей для иррациональных алгебраических чисел с ограниченными неполными частными на утверждение теоремы Рота (лемма 4). $\square$

Далее приводится аналог известного утверждения И. М. Виноградова.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N \geq 1$ — натуральное число,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, (a, q) = 1, |\theta| \leq 1.$$

Тогда при $N \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$S(N; \alpha) \ll N \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N} \right),$$

где положительная постоянная в знаке $\ll$ — абсолютная.

ЛЕММА 5. Пусть $1 \leq u < N$. Тогда $\sum_{u < n \leq N} \Lambda(n) f(n) = S_1 - S_2 - S_3$, где

$$S_1 = \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{l \leq Nd^{-1}} (\ln l) f(ld); \quad S_2 = \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{n \leq u} \Lambda(n) \sum_{r \leq N(dn)^{-1}} f(ndr);$$

$$S_3 = \sum_{u < m \leq Nu^{-1}} \left(\sum_{\substack{d|m \\ d \leq u}} \mu(d) \right) \sum_{u < n \leq Nm^{-1}} \Lambda(n) f(nm).$$

Это известная лемма Вона.

ТЕОРЕМА 4. Пусть α — иррациональное число с ограниченными неполными частными, $N > 1$ — вещественное число и

$$S = S(N; \alpha) = \sum_{n \leq N} \Lambda(n) \rho(\alpha n).$$

Тогда $S \ll N(\ln N)^{3,5} \Delta$, $\Delta = N^{-0,2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся леммой 5, положив в ней $u = N^{0,2}$. Имеем

$$S(N; \alpha) = S_1 - S_2 - S_3 + \theta u, |\theta| \ll 1,$$

где

$$S_1 = \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{l \leq Nd^{-1}} (\ln l) \rho(\alpha ld); \quad S_2 = \sum_{d \leq u} \mu(d) \sum_{n \leq u} \Lambda(n) \sum_{r \leq N(dn)^{-1}} \rho(\alpha ndr);$$

$$S_3 = \sum_{u < m \leq Nu^{-1}} \left(\sum_{\substack{d|m \\ d \leq u}} \mu(d) \right) \sum_{u < n \leq Nm^{-1}} \Lambda(n) \rho(\alpha nm).$$

Суммы S_1 и S_2 оцениваем одинаково, сводя их к сумме

$$\Upsilon(M; \alpha k) = \sum_{x \leq M} \rho(\alpha k x),$$

где $k \leq u^2$.

Воспользуемся леммой 2 (леммой Дирихле). Выберем $\tau = M^{1/2}u^{-1}$. Тогда найдется натуральное число Q такое, что $\|k\alpha Q\| \leq \tau^{-1}$, $Q \leq \tau$.

Пусть, далее, $q_s, s \geq 1$ — последовательность натуральных чисел, которые являются знаменателями подходящих дробей к числу α . Тогда найдется номер n такой, что $q_n \leq Qk < q_{n+1}$. По экстремальному свойству подходящих дробей и лемме 3 находим

$$\tau^{-1} \geq \|Qk\alpha\| \geq \|q_n\alpha\| > 0,5q_{n+1}^{-1}.$$

Следовательно, $q_{n+1} > 0,5\tau$. В силу ограниченности неполных частных числа α имеем

$$q_{n+1} \ll q_n \leq Qk.$$

Отсюда получим $\tau \geq Q \gg k^{-1}\tau \gg u^{-2}\tau$. По теореме 3 находим

$$\Upsilon(M; \alpha) \ll M(Q^{-1} + Q/M) \ll M(u^2\tau^{-1} + M^{-1}\tau) \ll M^{1/2}u^{-1}.$$

Таким образом имеем

$$|S_1| + |S_2| \ll (\ln N)^2 \sum_{d \leq u} N^{1/2}d^{-1/2}u^{-1} + (\ln N)^3 \sum_{d \leq u^2} N^{1/2}d^{-1/2}u^{-1} \ll N^{1/2}(\ln N)^3.$$

Далее оценим S_3 :

$$|S_3| \leq \sum_{k=0}^{\ln(Nu^{-2})} S_{3,k}, S_{3,k} = \sum_{Nu^{-1}e^{-k-1} < m \leq Nu^{-1}e^{-k}} \left| \sum_{u < n \leq Nm^{-1}} \Lambda(n)\rho(\alpha nm) \right|.$$

Воспользуемся неравенством Коши. Получим

$$\begin{aligned} |S_{3,k}|^2 &\leq 2Nu^{-1}e^{-k+1} \sum_{Nu^{-1}e^{-k-1} < m \leq Nu^{-1}e^{-k}} \left| \sum_{u < m \leq Nm^{-1}} \Lambda(n)\rho(\alpha nm) \right|^2 \leq \\ &\leq 2Nu^{-1}e^{-k+1} \sum_{u < n_1, n_2 \leq ue^k} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2) \sum_{Nu^{-1}e^{-k-1} < m \leq Nu^{-1}e^{-k}} \rho(\alpha n_1 m)\rho(\alpha n_2 m). \end{aligned}$$

Для оценки $S_{3,k}$ при $n_1, n_2 \leq u$ необходимо оценить сверху сумму

$$T = \sum_{Nu^{-1}e^{-k-1} < m \leq Nu^{-1}e^{-k}} \rho(\alpha n_1 m)\rho(\alpha n_2 m).$$

С этой целью возьмем $\tau = \sqrt{N}/u$. Тогда по лемме Дирихле найдутся $(A_1, Q_1) = 1$ и $(A_2, Q_2) = 1$ такие, что

$$\alpha n_1 = \frac{A_1}{Q_1} + \frac{\theta_1}{Q_1\tau}, \alpha n_2 = \frac{A_2}{Q_2} + \frac{\theta_2}{Q_2\tau}, |\theta_1| \leq 1, |\theta_2| \leq 1.$$

Поскольку неполные частные числа α ограничены, справедливы неравенства

$$\tau u^{-1} \leq Q_1, Q_2 \leq \tau.$$

С большой точностью оценку суммы T можно получить из оценки полной рациональной арифметической суммы вида

$$T_0 = T_0(A_1, A_2; Q_1, Q_2) = \sum_{m=1}^Q \rho\left(\frac{A_1 m}{Q_1}\right) \rho\left(\frac{A_2 m}{Q_2}\right),$$

где $Q = [Q_1, Q_2]$ — наименьшее общее кратное чисел Q_1 и Q_2 .

Нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 6. Пусть Q_1, Q_2 — натуральные числа, $Q = [Q_1, Q_2]$, $(A_1, Q_1) = 1$, $(A_2, Q_2) = 1$, и

$$T_0 = T_0(A_1, A_2; Q_1, Q_2) = \sum_{m=1}^Q \rho\left(\frac{A_1 m}{Q_1}\right) \rho\left(\frac{A_2 m}{Q_2}\right).$$

Тогда

$$T_0 = \frac{1}{12} \frac{Q_1 Q_2}{A_1 A_2 Q^2} \left(\frac{A_1 Q}{Q_1}, \frac{A_2 Q}{Q_2} \right)^2 + O(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим сначала частный случай $A_1 = A_2 = 1$, $Q_1 = Q_2 = Q$. Сумма T_0 примет вид

$$T_0 = T_0(1, 1; Q, Q) = \sum_{m=1}^Q \rho^2\left(\frac{m}{Q}\right) = \frac{Q}{12} + \frac{1}{6Q}.$$

Действительно,

$$T_0 = \sum_{m=0}^{Q-1} \left(\frac{1}{4} - \frac{m}{Q} + \frac{m^2}{Q^2} \right) = \frac{Q}{4} - \frac{(Q-1)Q}{2Q} + \frac{(Q-1)Q(2Q-1)}{6Q^2} = \frac{Q}{12} + \frac{1}{6Q}.$$

Для вывода леммы 6 воспользуемся утверждением, принадлежащим Фрэнелю [16]. $\square$

ЛЕММА 7. Пусть m, n — натуральные числа. Тогда имеем

$$I = I(m, n) = \int_0^1 \rho(mx) \rho(nx) dx = \frac{(m, n)^2}{12mn}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

При $Q \rightarrow \infty$ находим

$$S(Q; m, n) = \frac{1}{Q} \sum_{k=0}^{Q-1} \rho\left(\frac{mk}{Q}\right) \rho\left(\frac{nk}{Q}\right) \rightarrow I = \frac{(m, n)^2}{12mn},$$

кроме того

$$S(Q; m, n) = \frac{(m, n)^2}{12mn} + O\left(\frac{1}{Q}\right).$$

Собирая вместе, полученные выше результаты, приходим к утверждению теоремы 4. $\square$

4. Заключение

В настоящей статье оцениваются линейные арифметические суммы значений многочленов Бернулли, когда аргумент многочлена представляет собой линейную функцию с иррациональным коэффициентом, а переменная пробегает целые значения из “сплошного промежутка”. Эту задачу можно решать с помощью анализа Фурье, но, к сожалению, оценки получаются более грубыми, и их вывод сталкивается с определенными трудностями. Отметим также, что многие задачи современной теории чисел можно сформулировать через “свертку” арифметических функций с значениями многочлена Бернулли. Список литературы расширен для того, чтобы показать перспективы развиваемого здесь подхода к различным задачам теории чисел.

Частично, изложенные здесь результаты, были доложены на конференции в Баку 11 сентября 2015 г.[24].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981. — 176 с.
2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. — М.: Наука, 1980. — 144 с.
3. Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.:Изд-во иностр. лит-ры, 1961. — 213 с.
4. Roth K. F. Rational approximations of algebraic numbers//Mathematika, 1955, 2, p.1–20 (with corrigendum p. 168).
5. Чубариков В. Н. Об одном кратном тригонометрическом интеграле. Докл. АН СССР, 1976, 227, № 6, 1308–1310.
6. Чубариков В. Н. О кратных рациональных тригонометрических суммах и кратных интегралах// Мат. заметки. — 1976. — Т.20, №1. — С.61-68.
7. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орел: Изд-во Орловского гос. ун-та, 2013. — 464с.
8. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука, 1987. — 368 с.
9. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. — М.: Дрофа, 2006. — 640 с.
10. Vinogradov, I. M. A new method of estimation of trigonometrical sums, Math. USSR-Sb. **43**, 1936, No.1, 175–188.
11. Hua, L.-K. An improvement of Vinogradov’s mean-value theorem and several applications, Quart. J. Math., **20**, 1949, 48–61.
12. Arkhipov, G. I. A theorem on the mean value of the modulus of a multiple trigonometric sum, Math. Notes **17**, 1975, 84–90.
13. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. Multiple trigonometric sums, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **40**, No.1, 1976, 209–220.
14. Hua, L.-K. On an exponential sums, J. Chinese Math. Soc., **2**, 1940, 301–312.

15. Chen, J.-R. On Professor Hua's estimate on exponential sums, *Acta Sci. Sinica*, **20**, 1977, No.6, 711–719.
16. Романов Н.П. Теория чисел и функциональный анализ: сборник трудов/Под общ. ред. В. Н. Чубарикова. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2013. — 478 с.
17. Шихсадилов, М.Ш. Об одном классе осциллирующих интегралов, *Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех.* **5**, 2015, 61–63.
18. Arkhipov, G. I., Karatsuba, A. A., Chubarikov, V. N. Trigonometric integrals, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **43**, No.5, 1979, 971–1003.
19. Titchmarsh, E. C. The Theory of the Riemann Zeta-function, 2nd ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.
20. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N., Karatsuba, A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis, *De Gruyter expositions in mathematics*; 39, Berlin, New York, 2004.
21. Hua, L.-K. Additive theory of prime numbers. *Trudy MIAN SSSR.*, **22**, 1947, 1–179.
22. Montgomery, H. L. Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis, *CBMS, Regional Conference Series in Mathematics*, No. 84, 1994.
23. Hua, L.-K. On the number of solutions of Tarry's problem, *Acta Sci. Sinica*, **1**, 1953, 1–76.
24. Chubarikov, V. N. Azerbaijan-Turkey-Ukrainian Int. Conf. "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications". Abstracts. (September 08-13, 2015, Baku-Azerbaijan). Linear arithmetic sums and Gaussian multiplication theorem. 2015, p.38.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1981, *Fundamentals of Number Theory*, Nauka, Moscow, 176 p.
2. Vinogradov I. M. 1980, *Method of trigonometric sums in Number Theory*, Nauka, Moscow, 144 p.
3. Касселс Дж. В. С. 1961, *Introduction to the theory of diophantine approximation* ed. foreign of literature, Moscow, 213 p.
4. Roth K. F. 1955, "Rational approximations of algebraic numbers", *Mathematika*, Moscow, vol. 2, pp. 1-20.
5. Chubarikov V. N. 1976, "About one multiple trigonometric integrals", *rep. USSR AS*, vol. 227, no. 6, pp. 1308-1310.
6. Chubarikov V. N. 1976, "Multiple rational trigonometric sums and multiple integrals", *Mat. notes*, vol. 20, no. 1, pp. 61-68.
7. Arkhipov G. I. 2013, *Selected works*, ed. of Orjol Stste Univ., Orjol, 464 p.
8. Arkhipov G. I. Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1987, *Theory of multiple trigonometric sums*, Nauka, Moscow, 368 p.
9. Arkhipov G. I. Sadovnichy V. A., Chubarikov V. N. 2006, *Lectures on mathematical analysis*, Drofa, Moscow, 640 p.

10. Vinogradov I. M. 1936, *Math. USSR-Sb.* "The new method of estimation of trigonometrical sums", Vol. 43, no. 1, Moscow, pp. 175–188.
11. Hua L.-K. 1949, "An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications", *Quart. J. Math.*, Vol. 20, 1949, pp. 48–61.
12. Arkhipov G. I. 1975, "A theorem on the mean value of the modulus of a multiple trigonometric sum", *Math. Notes*, Vol. 17, pp. 84–90.
13. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. 1979, "Multiple trigonometric sums", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* Vol. 40 no. 1, pp. 209–220.
14. Hua L.-K. 1940, "On an exponential sums", *J. Chinese Math. Soc.*, Vol. 2, pp. 301–312.
15. Chen, J.-R. 1977, "On Professor Hua's estimate on exponential sums", *Acta Sci. Sinica*, Vol. 20, no. 6, pp. 711–719.
16. Romanov N. P. 2013, *Number Theory and functional analysis: proceedings/under the total ed. V. H. Chubarikov*, Tomsk, Izd-vo., Tom. un-ta, 478 p.
17. Shihsadilov M. Sh. 2015, "Об одном классе осциллирующих интегралов", *Vestnik Moscow Univ. Ser. mat., meh.*, Vol 5, pp. 61–63.
18. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1979, "Trigonometric integrals", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, Vol. 43, no. 5, pp. 971–1003.
19. Titchmarsh E. C. 1986, *The Theory of the Riemann Zeta-function 2nd ed.*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.
20. Arkhipov, G. I., Chubarikov, V. N. & Karatsuba, A. A. 2004, "Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis", *De Gruyter expositions in mathematics Vol. 39*, Berlin, New York.
21. Hua L. K. 1947, "Additive theory of prime numbers", *Trudy MIAN SSSR*, Vol. 22, pp. 1–179.
22. Montgomery H. L. 1994, "Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis", *CBMS, Regional Conference Series in Mathematics*, no. 84.
23. Hua L.-K. 1953 "On the number of solutions of Tarry's problem", *Acta Sci. Sinica*, Vol. 1, pp. 1–76.
24. Chubarikov V. N. 2015 "Linear arithmetic sums and Gaussian multiplication theorem", *Abstracts Azerbaijan-Turkey-Ukrainian Int.Conf. "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications"*, Baku-Azerbaijan, September 08–13, 2015, pp. 38.

Механико-математический факультет,

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Получено 08.12.2015

Принято в печать 10.03.2016